UNIVERSITETI I SHKODRËS “LUIGJ GURAKUQI”

FAKULTETI I SHKENCAVE TË NATYRËS · DEPARTAMENTI I MATEMATIKËS

ANALIZË MATEMATIKE III / LEKSIONI 02

Kriteret e konvergjencës të serive numerike

Seritë me kufiza jonegative · Kriteret e krahasimit

Seritë p · D’Alembert · Koshi · Kriteri integral

PROGRAMI
Bachelor në Matematikë, viti akademik 2026–2027

PEDAGOGE
Prof. As. Dr. Siditë Duraj

Udhëzues për studimin. Filloni nga kushtet e teoremave, lexoni çdo vërtetim, analizoni shembujt e zgjidhur dhe pastaj kaloni te ushtrimet e pavarura. Qëllimi është të argumentohet natyra e një serie, jo vetëm të jepet një rezultat numerik.

1. Rezultatet e të nxënit dhe njohuritë paraprake

Në përfundim të leksionit, studenti duhet të jetë në gjendje të: (i) formulojë kriteret kryesore të konvergjencës për seri me kufiza jonegative; (ii) vërtetojë teoremat duke përdorur monotoninë dhe krahasimin; (iii) dallojë rastet e zbatueshme dhe ato jopërfundimtare; (iv) zgjedhë kriterin më efikas për një seri konkrete; (v) kontrollojë saktësinë logjike të argumentimit.

NJOHURI PARAPRAKE

Vargjet dhe limitet, shumat e pjesshme, kushti $a_n \to 0$, kriteri i Bolcano–Koshit, seria gjeometrike dhe seria harmonike. Këto nocione trajtohen në Leksionin 1.

2. Seritë me kufiza jonegative

Për serinë $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, supozojmë se $a_n \geq 0$ për çdo n mjaft të madh. Heqja ose ndryshimi i një numri të fundmë kufizash nuk e ndryshon konvergjencën.

TEOREMË 2.1 · MONOTONIA E SHUMAVE TË PJESSHME

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ku $a_n \geq 0$, konvergjon atëherë dhe vetëm atëherë kur vargu

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$$

është i kufizuar sipër.

Vërtetim. Për çdo $N \geq 1$, kemi

$$S_{N+1} - S_N = a_{N+1} \geq 0.$$

Pra S_N është monoton jozbritës. Sipas teoremës së konvergjencës së vargjeve monotone, ai ka limit të fundmë pikërisht kur është i kufizuar sipër. Ky limit është shuma e serisë. □

PASOJË

Nëse $a_n \geq 0$ dhe seria divergon, atëherë $S_N \to +\infty$. Për seri me shenja të ndryshme, shumat e pjesshme mund të oshilojnë dhe kjo pasojë nuk zbatohet.

3. Kriteri i krahasimit të drejtpërdrejtë

TEOREMË 2.2 · KRAHASIMI

Nëse $0 \le a_n \le b_n$ për të gjithë $n \ge n_0$, atëherë:

(i) konvergjenca e $\sum b_n$ sjell konvergjencën e $\sum a_n$;

(ii) divergjenca e $\sum a_n$ sjell divergjencën e $\sum b_n$.

Vërtetim. Nga $0 \le a_n \le b_n$ rezulton

$$0 \le \sum_{n=n_0}^{N} a_n \le \sum_{n=n_0}^{N} b_n.$$

Nëse seria më e madhe konvergjon, shumat e saj të pjesshme janë të kufizuara sipër; të tilla janë edhe shumat e serisë më të vogël, e cila konvergjon nga Teorema 2.1. Pohimi i dytë është kundërpozitivi i të parit. □

SHEMBULL 2.1 · KRAHASIM ME SERI GJEOMETRIKE

Shqyrtojmë $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2^n}$.

1. Për çdo $n \ge 1$, termi është pozitiv.
2. Kemi $0 < \dfrac{1}{n^2 + 2^n} \le \dfrac{1}{2^n}$.
3. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$ është gjeometrike me raport $1/2 < 1$, prandaj seria e dhënë **konvergjon**.

KUJDES LOGJIK

Nga $0 \le a_n \le b_n$ dhe divergjenca e $\sum b_n$ *nuk* mund të përfundojmë për natyrën e $\sum a_n$. Kundërshembull: $1/n^2 \le 1/n$ dhe këto dy seri kanë natyrë të ndryshme.

4. Seritë p

TEOREMË 2.3 · KUSHTI I KONVERGJENCËS

Për $p \in \mathbb{R}$, seria

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ konvergjon } \iff p > 1}$$

është divergjente në çdo rast $p \le 1$.

Vërtetim. Për $p \le 0$, kemi $n^{-p} \not\to 0$, ndaj seria divergon. Për $0 < p \le 1$, kemi $n^{-p} \ge n^{-1}$, pra divergjenca rrjedh nga krahasimi me serinë harmonike.

Për $p > 1$, ndajmë indeksat në blloqet $2^k \le n < 2^{k+1}$, ku ka 2^k kufiza. Meqë $n^{-p} \le 2^{-kp}$, marrim

$$\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{n^p} \le 2^k 2^{-kp} = 2^{-k(p-1)}.$$

Seria e kufijve të sipërm është gjeometrike me raport $2^{-(p-1)} < 1$, prandaj seria p konvergjon. □

5. Kriteri i krahasimit limit

TEOREMË 2.4 · KRAHASIMI LIMIT

Nëse $a_n, b_n > 0$ për indekse mjaft të mëdhenj dhe

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L, \qquad 0 < L < +\infty,$$

atëherë $\sum a_n$ dhe $\sum b_n$ kanë të njëjtën natyrë.

Vërtetim. Zgjedhim $\varepsilon = L/2$. Për n mjaft të mëdhenj,

$$\frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3L}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{L}{2} b_n < a_n < \frac{3L}{2} b_n.$$

Dy zbatime të krahasimit të drejtpërdrejtë japin pohimin. □

DY RASTE NJËDREJTIMËSHE

Nëse $L = 0$, konvergjenca e $\sum b_n$ sjell konvergjencën e $\sum a_n$. Nëse $L = +\infty$, divergjenca e $\sum b_n$ sjell divergjencën e $\sum a_n$. Pohimet e kundërta nuk janë të vlefshme përgjithësisht.

SHEMBULL 2.2 · KRAHASIM ME $1/n^2$

Për $a_n = \dfrac{3n+1}{n^3+2}$, zgjedhim $b_n = 1/n^2$ dhe llogarisim

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(3n+1)}{n^3+2} = 3.$$

Si $0 < 3 < +\infty$ dhe $\sum 1/n^2$ konvergjon, edhe seria e dhënë **konvergjon**.

6. Kriteri i raportit i D'Alembert-it

TEOREMË 2.5 · RAPORTI

Le të jenë $a_n > 0$ për indekse mjaft të mëdhenj dhe të ekzistojë $q = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$. Atëherë

$$\begin{aligned} q < 1 &\implies \text{konvergjencë},\\ q > 1 &\implies \text{divergjencë},\\ q = 1 &\implies \text{rast jopërfundimtar}. \end{aligned}$$

Vërtetim. Në rastin $q < 1$ zgjedhim $r \in (q, 1)$; eventualisht $a_{n+1} \le r a_n$, prandaj

$$a_n \le a_N r^{n-N}, \qquad n \ge N.$$

Krahasimi me serinë gjeometrike jep konvergjencën. Nëse $q > 1$ (edhe $+\infty$), eventualisht $a_{n+1} \ge a_n$, kështu $a_n \not\to 0$. Kushti i domosdoshëm dështon dhe seria divergon. □

SHEMBULL 2.3 · FAKTORIELËT

Për $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \to 0 < 1.$$

Pra seria **konvergjon**. Ndërsa për $\sum n!/3^n$, raporti është $(n+1)/3 \to +\infty$, kështu seria **divergon**.

RAPORTI 1 NUK VENDOS

Për $\sum 1/n$ dhe $\sum 1/n^2$, raporti i kufizave të njëpasnjëshme shkon në 1, por seria e parë divergon dhe e dyta konvergjon. Duhet përdorur metodë tjetër.

7. Kriteri i rrënjës i Koshit

TEOREMË 2.6 · RRËNJA E RENDIT n

Për $a_n \ge 0$, supozojmë që ekziston

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Nëse $\rho < 1$, seria konvergjon; nëse $\rho > 1$, divergon; nëse $\rho = 1$, kriteri është jopërfundimtar.

Vërtetim. Nëse $\rho < 1$, marrim $r \in (\rho, 1)$ dhe, për n mjaft të mëdhenj, $a_n \le r^n$; krahasimi jep konvergjencën. Nëse $\rho > 1$, eventualisht $a_n > 1$ dhe termi i përgjithshëm nuk shkon në zero. □

SHEMBULL 2.4 · KUFI ME FUQI n

Për serinë

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+1} \right)^n$$

llogarisim $\sqrt[n]{a_n} = \frac{2n}{3n+1} \to \frac{2}{3} < 1$; prandaj seria **konvergjon**.

FORMA ME lim sup

Në formulimin e përgjithësuar merret $\rho = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Nëse $\rho < 1$, kemi konvergjencë; nëse $\rho > 1$, divergjencë sepse një nënvarg termash nuk shkon në zero; kur $\rho = 1$, kriteri nuk vendos.

8. Kriteri integral

TEOREMË 2.7 · KRITERI INTEGRAL

Le të jetë $f : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ e vazhdueshme dhe jorritëse, me $a_n = f(n)$. Atëherë

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konvergjon} \iff \int_1^{\infty} f(x)\,dx < +\infty}.$$

Vërtetim. Nga monotonia, për çdo $n \geq 1$ kemi

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n).$$

Duke mbledhur pabarazitë,

$$\sum_{n=2}^{N+1} f(n) \leq \int_1^{N+1} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{N} f(n).$$

Për shkak të monotonisë, kufizueshmëria e shumave dhe e integraleve të prera është ekuivalente; prandaj të dyja shprehjet konvergjojnë ose divergojnë njëkohësisht. □

SHEMBULL 2.5 · SERIA LOGARITMIKE

Për $n \geq 2$ shqyrtojmë

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}.$$

Funksioni $f(x) = 1/[x(\ln x)^p]$ është pozitiv dhe eventualisht zbritës për çdo $p \in \mathbb{R}$. Me $t = \ln x$,

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \int_{\ln 2}^{\infty} t^{-p}\,dt.$$

Integrali i fundit konvergjon pikërisht për $p > 1$; i njëjti kusht vlen për serinë.

8.1 Vlerësimi i mbetjes

Nëse $\sum f(n)$ konvergjon dhe $R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} f(n)$, atëherë

$$\int_{N+1}^{\infty} f(x)\,dx \le R_N \le \int_{N}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Për $f(x) = x^{-2}$, përftojmë

$$\frac{1}{N+1} \le R_N \le \frac{1}{N}.$$

Prandaj $N \ge 1001$ siguron në mënyrë rigoroze $R_N < 10^{-3}$; $N = 1000$ jep vetëm $R_N \le 10^{-3}$.

9. Zgjedhja e kriterit të përshtatshëm

STRUKTURA E KUFIZËS	KRITERI I SUGJERUAR
Shprehje racionale në n	Krahasimi limit me n^{-p}
Faktorielë ose prodhime	Kriteri i raportit
Shprehje të ngritura në fuqinë n	Kriteri i rrënjës
Funksion $f(n)$ pozitiv e jorritës	Kriteri integral
Pabarazi me një seri të njohur	Krahasimi i drejtpërdrejtë

Një rezultat $q = 1$ ose $\rho = 1$ nuk përbën provë konvergjence apo divergjence; duhet zgjedhur një kriter tjetër.

10. Ushtrime të zgjidhura: sintezë

SHEMBULL 2.6 · KRAHASIM LIMIT DHE DIVERGJENCË

Për $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{n^3+4}$ zgjedhim $b_n = 1/n$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(2n^2+1)}{n^3+4} = 2.$$

Meqë seria harmonike divergon dhe kufiri është pozitiv e i fundmë, seria e dhënë **divergon**.

SHEMBULL 2.7 · KUSHTI I DOMOSDOSHËM

Për $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ kemi

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=e^{-1}\neq 0.$$

Kështu kushti i domosdoshëm nuk plotësohet dhe seria **divergon**.

SHEMBULL 2.8 · RAPORTI PËR $n!/n^n$

Për $a_n=n!/n^n>0$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\longrightarrow e^{-1}<1.$$

Prandaj seria $\sum_{n=1}^{\infty}n!/n^n$ **konvergjon**.

11. Ushtrime për punë të pavarur

Në çdo rast shkruani kriterin, verifikoni hipotezat dhe argumentoni përfundimin.

1. Përcaktoni natyrën e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+5n+6}$.
2. Përcaktoni natyrën e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+3}{n^2+1}$.
3. Studioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ me raport.
4. Shqyrtoni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{4n+2}\right)^n$ me rrënjë.
5. Për cilat vlera të p konvergjon $\sum_{n=2}^{\infty}1/[n(\ln n)^p]$?
6. Pse kriteri i raportit nuk vendos për $\sum n^{-2}$?
7. Gjeni kufirin e sipërm të mbetjes R_N të $\sum n^{-3}$.
8. Jepni dy seri me $\lim a_{n+1}/a_n=1$, por natyrë të ndryshme.
9. Vërtetoni rastin $L=0$ të krahasimit limit.
10. Vërtetoni: nëse $0\le a_n\le Cb_n$ eventualisht dhe $\sum b_n$ konvergjon, atëherë $\sum a_n$ konvergjon.

ORIENTIME DHE PËRGJIGJE TË SHKURTRA

1. Konvergjon, si $1/n^2$; 2. Divergon, si $1/n$; 3. Konvergjon, raporti $\to 1/e$; 4. Konvergjon, rrënja $\to 3/4$; 5. $p > 1$; 6. Raporti $\to 1$; 7. $R_N \le 1/(2N^2)$; 8. $\sum 1/n$ dhe $\sum 1/n^2$; 9.–10. Përdorni pabarazi eventuale dhe krahasim me një seri shumëzuar me konstante pozitive.

Përmbledhje dhe literaturë

Kriteret e konvergjencës mundësojnë studimin e një serie pa njehsuar shumën e saj. Për të zgjedhur saktë kriterin, identifikoni strukturën e kufizës së përgjithshme, kontrolloni kushtet dhe mos e interpretoni rastin jopërfundimtar si përfundim.

1. M. Ofendija, *Analiza Matematike II*, ShBLU, Tiranë, 2005, Kapitulli IX, f. 16–35.
2. T. M. Apostol, *Mathematical Analysis*, 2nd ed., Addison–Wesley, 1974, Kapitulli 8.