Analizë Matematike III — Leksioni 3

Vargjet funksionale: konvergjenca pikësore dhe uniforme

Prof. As. Dr. Siditë Duraj

Universiteti i Shkodrës “Luigj Gurakuqi” · Cikël i III-të në Matematikë · 2026–2027

Qëllimi dhe vendi në strukturën e kursit

Vargjet funksionale përgjithësojnë vargjet numerike: kufizat e vargut tani janë funksione, jo numra. Duke kaluar nga $f_n(x)$ te një funksion kufi $f(x)$, duhet të dallohet rregullisht nëse numri N i kërkuar nga përkufizimi i konvergjencës varet apo jo nga pika x. Kjo është diferenca themelore midis konvergjencës **pikësore** dhe asaj **uniforme**.

Rezultatet e të nxënit. Studenti duhet të jetë në gjendje (i) të formulojë përkufizimet me kuantifikatorë; (ii) të përdorë normën $\|\cdot\|_\infty$ kur është e fundme; (iii) të zbatojë kriterin uniform të Koshit; (iv) të vërtetojë teoremën e vazhdueshmërisë së kufirit uniform; (v) të dallojë kundërshembujt që tregojnë pamjaftueshmërinë e konvergjencës pikësore; (vi) të argumentojë ruajtjen e integrimit dhe kufizimet për derivimin.

Parakushtet. Vargjet e numrave realë, vlera absolute dhe norma, vazhdueshmëria në një segment, plotësia e $\mathbb{R}$, supremumi dhe integrali i Rimanit.

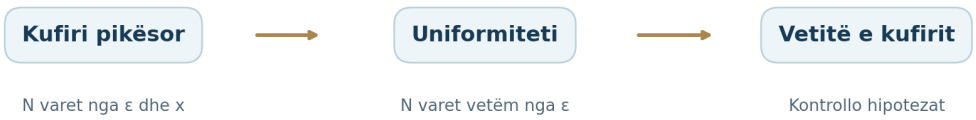


Figura 1: Skema logjike e kalimit nga konvergjenca pikësore tek uniformiteti dhe vetitë e kufirit.

Përkufizimi i vargut funksional

Le të jetë $E \subseteq \mathbb{R}$ bashkësi jo e zbrazët. Një **varg funksional** është një familje funksionesh

$$f_n : E \to \mathbb{R}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Shënimi (f_n) ose $(f_n)_{n\geq 1}$ nuk nënkupton asnjë lloj konvergjence. Për çdo $x \in E$ fiksojmë një varg numerik $(f_n(x))$; sjellja e këtij vargu mund të ndryshojë sipas x.

Përkufizim 3.1 (konvergjenca pikësore). Thuhet se f_n konvergjon pikësisht drejt $f : E \to \mathbb{R}$ në E nëse

$$\boxed{\forall x \in E\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon, x)\ \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.}$$

Përkufizim 3.2 (konvergjenca uniforme). Thuhet se f_n konvergjon uniformisht drejt f në E nëse

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon)\ \forall x \in E\ \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.}$$

Ndryshimi i vetëm në paraqitje është vendi i kuantifikatorit $\forall x$ në raport me $\exists N$; në përmbajtje ai përcakton një nocion thelbësisht më të fortë.

Propozim 3.1. Konvergjenca uniforme në E sjell konvergjencë pikësore në E.

Vërtetim. Për çdo $\varepsilon > 0$ konvergjenca uniforme jep një $N(\varepsilon)$ që vlen për të gjitha pikat. Për një pikë fikse x, i njëjti N vërteton konvergjencën pikësore. □

E kundërta është përgjithësisht e pavërtetë, siç tregon shembulli pasues.

Kundërshembulli themelor: $f_n(x) = x^n$

Vendosim $f_n(x) = x^n$ në $E = [0, 1]$. Kur $0 \leq x < 1$, $x^n \to 0$, ndërsa $f_n(1) = 1$ për çdo n. Prandaj

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Kufiri f është i ndërprerë në $x = 1$, ndonëse çdo f_n është i vazhdueshëm. Ky fakt sugjeron, por nuk e zëvendëson, provën direkte se konvergjenca nuk është uniforme.

Vërtetim direkt i jouniformitetit. Për çdo n,

$$\sup_{x\in[0,1]} |x^n - f(x)| = \sup_{0\leq x<1} x^n = 1.$$

Supremumi është 1, edhe pse për $x < 1$ nuk arrihet; merret duke zgjedhur x mjaft pranë 1. Si rrjedhim, gabimi maksimal nuk tenton në zero.

Kujdes. Në çdo segment $[0, a]$, ku $0 < a < 1$, kemi

$$\sup_{x\in[0,a]} |x^n| = a^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

prandaj konvergjenca është uniforme në $[0, a]$. Ajo nuk është uniforme as në $[0, 1)$: megjithëse pika 1 është përjashtuar, supremumi vazhdon të jetë 1.

Norma uniforme dhe kriteri i supremumit

Për një funksion të kufizuar $g : E \to \mathbb{R}$, përcaktojmë normën uniforme

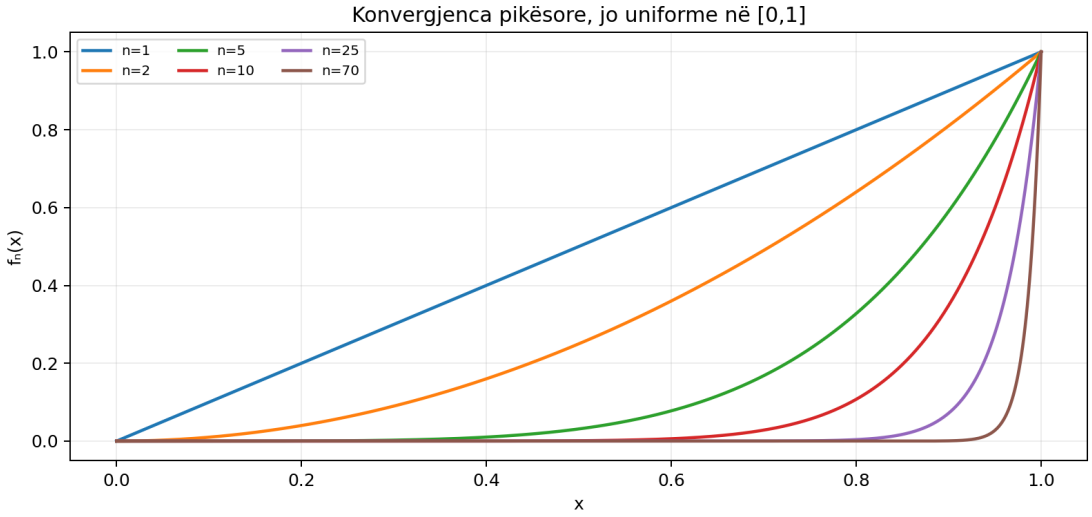


Figura 2: Vargjet e funksioneve x^n pranë skajit $x = 1$.

$$\|g\|_{\infty,E} = \sup_{x\in E} |g(x)|.$$

Për funksione jo domosdoshmërisht të kufizuara mund të përdorim një supremum me vlerë $+\infty$; norma në kuptimin e zakonshëm kërkon kufizueshmëri.

Teorema 3.1 (kriteri i supremumit). Vargu f_n konvergjon uniformisht drejt f në E atëherë dhe vetëm atëherë kur

$$\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \longrightarrow 0.$$

Vërtetim. Le të shënojmë $M_n = \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|$, duke pranuar edhe vlerën $+\infty$ për indekse të veçanta. Nëse konvergjenca është uniforme, për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston N i tillë që $|f_n(x) - f(x)| <$
$fracvarepsilon2$ për të gjithë x dhe $n \geq N$. Kështu $M_n \leq$
$fracvarepsilon2 < \varepsilon$ për $n \geq N$, pra $M_n \to 0$. Anasjelltas, nëse $M_n \to 0$, për çdo $\varepsilon > 0$ ka N me $M_n < \varepsilon$, dhe kështu $|f_n(x) - f(x)| \leq M_n < \varepsilon$ për çdo $x \in E$. □

Përdorimi i
$fracvarepsilon2$ në drejtimin e parë është i qëllimshëm: nga pabarazia strikte pikësore $|g(x)| < \varepsilon$ nuk rrjedh domosdoshmërisht sup $|g| < \varepsilon$.

Shembull i konvergjencës uniforme: $x^n(1-x)$

Vendosim $g_n(x) = x^n(1-x)$, $x \in [0,1]$. Për çdo pikë $x \in [0,1]$, $g_n(x) \to 0$. Për të përcaktuar konvergjencën uniforme nuk mjafton ky fakt; njehsojmë maksimumin.

$$g_n'(x) = nx^{n-1}(1-x) - x^n = x^{n-1}[n - (n+1)x].$$

Maksimumi në segment arrihet në $x_n =$
$fracnn + 1$ dhe jep

$$\boxed{\|g_n\|_{\infty,[0,1]} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.}$$

Prandaj $g_n \to 0$ uniformisht, megjithëse pika e maksimumit x_n zhvendoset drejt 1.

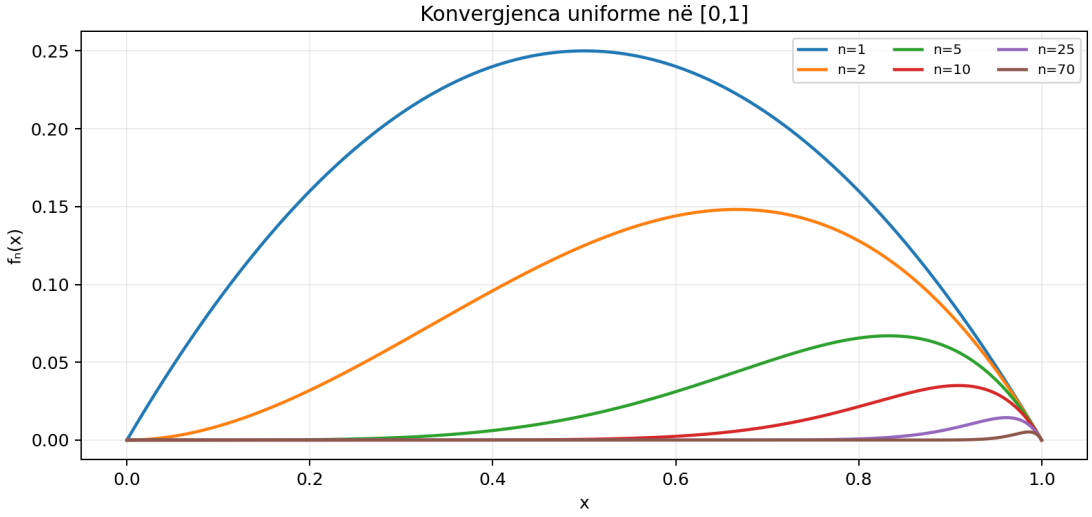


Figura 3: Vargu $x^n(1-x)$ ka konvergjencë uniforme.

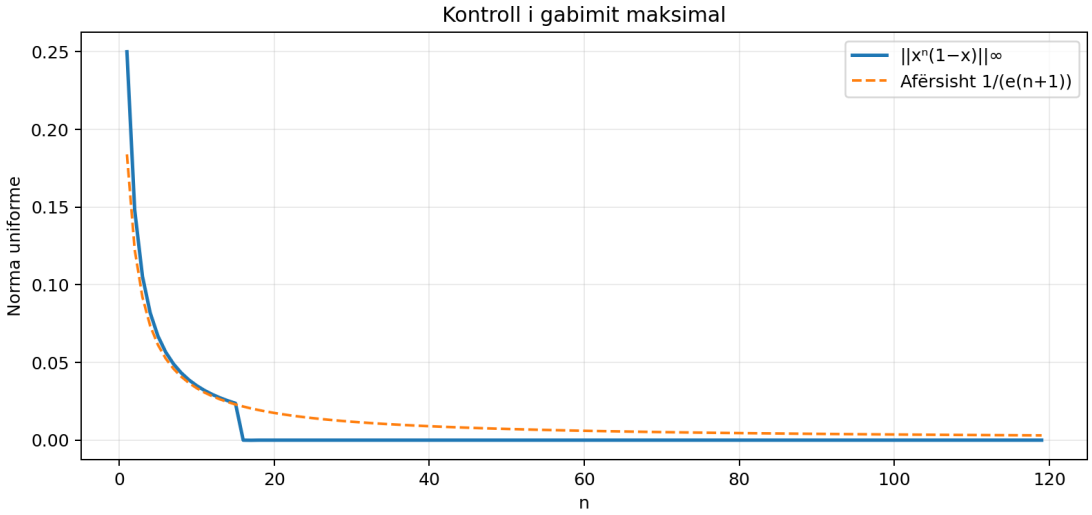


Figura 4: Norma uniforme e gabimit në varësi të n.

Kriteri uniform i Koshit

Teorema 3.2 (Koshi). Vargu (f_n) i funksioneve reale në E konvergjon uniformisht në E atëherë dhe vetëm atëherë kur

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall m, n \geq N\ \forall x \in E: \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Vërtetim, drejtimi i domosdoshëm. Nëse $f_n \to f$ uniformisht, zgjedhim N të tillë që $|f_k(x) - f(x)| <$

$fracvarepsilon2$ për çdo $k \geq N$ dhe çdo x. Pabarazia trekëndore jep

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Vërtetim, drejtimi i mjaftueshëm. Për çdo x fiks, kushti i teoremës bën që $(f_n(x))$ të jetë varg i Koshit në $\mathbb{R}$, pra ka limit $f(x)$ nga plotësia e $\mathbb{R}$. Për $\varepsilon > 0$ zgjedhim N që garanton $|f_n(x) - f_m(x)| <$
$fracvarepsilon2$ për çdo $m, n \geq N$ dhe çdo x. Fiksojmë $n \geq N$ dhe kalojmë $m \to \infty$: fitojmë $|f_n(x) - f(x)| \leq$
$fracvarepsilon2 < \varepsilon$ për çdo x. Ky është pikërisht përkufizimi uniform. □

Vërejtje. Ky kriter është veçanërisht i dobishëm kur funksioni kufi nuk njihet paraprakisht.

Konvergjenca uniforme dhe vazhdueshmëria

Teorema 3.3. Le të jenë $f_n : E \to \mathbb{R}$ të vazhdueshëm në një pikë $x_0 \in E$ (me topologjinë relative të E). Nëse $f_n \to f$ uniformisht në E, atëherë f është i vazhdueshëm në x_0.

Vërtetim. Për një $\varepsilon > 0$, zgjedhim N të tillë që $\sup_{x \in E} |f_N(x) - f(x)| <$
$fracvarepsilon3$. Nga vazhdueshmëria e f_N në x_0 ekziston $\delta > 0$ i tillë që $|f_N(x) - f_N(x_0)| <$
$fracvarepsilon3$ për $x \in E$, $|x - x_0| < \delta$. Atëherë

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| \\ + |f_N(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Pra f është i vazhdueshëm në x_0. □

Rrjedhim. Kufiri uniform i funksioneve të vazhdueshme në E është i vazhdueshëm në E. **E kundërta nuk vlen pa hipoteza shtesë**: kufiri i vazhdueshëm nuk garanton konvergjencë uniforme (shih $f_n(x) = x^n$ në $[0, 1)$, ku kufiri është funksioni konstant zero dhe i vazhdueshëm në këtë bashkësi).

Konvergjenca uniforme dhe integrimi

Teorema 3.4. Nëse $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ janë funksione të vazhdueshme dhe $f_n \to f$ uniformisht në $[a, b]$, atëherë f është i vazhdueshëm dhe

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.}$$

Vërtetim. Vazhdimësia e f rrjedh nga Teorema 3.3, prandaj integrali ekziston. Duke përdorur linearitetin dhe pabarazinë për integralin, marrim

$$\left| \int_a^b f_n(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq (b - a) \sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0.$$

Kjo është një provë e plotë, jo thjesht një rregull formal për ndërrimin e limitit me integralin. □

Kundërshembull: konvergjenca pikësore nuk mjafton për integrimin

Teorema 3.4 ka një hipotezë thelbësore: **uniformitetin**. Për të treguar pse nuk mund ta heqim pa zëvendësim me kushte të tjera, ndërtojmë një varg funksionesh të vazhdueshme në $[0,1]$ që konvergjon pikësisht drejt zeros, por integralet e tij janë vazhdimisht të barabarta me 1.

Për çdo numër të plotë $n \geq 2$, vendosim

$$h_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 \leq x \leq 1/n, \\ 2n - n^2 x, & 1/n < x \leq 2/n, \\ 0, & 2/n < x \leq 1. \end{cases}$$

Hapi 1 — Vazhdimësia. Në pikat e bashkimit $x =$
$frac1n$ dhe $x =$
$frac2n$, shprehjet përkatëse japin të njëjtën vlerë. Prandaj h_n është i vazhdueshëm në $[0,1]$.

Hapi 2 — Kufiri pikësor. Për $x = 0$ kemi $h_n(0) = 0$. Për çdo $x > 0$ të fiksuar, kur $n >$
$frac2x$, kemi $x >$
$frac2n$ dhe $h_n(x) = 0$. Kështu $h_n(x) \to 0$ në çdo pikë të $[0,1]$.

Hapi 3 — Integrali. Grafiku është një trekëndësh me bazë
$frac2n$ dhe lartësi n. Prandaj

$$\int_0^1 h_n(x)\,dx = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{2}{n} \cdot n = 1, \qquad \text{për çdo } n \geq 2.$$

Nga ana tjetër, funksioni kufi është $h \equiv 0$, prandaj $\int_0^1 h(x)\,dx = 0$. Rrjedhimisht,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 h_n(x)\,dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} h_n(x)\,dx.$$

Hapi 4 — Testi i uniformitetit. Maksimumi $h_n($
$frac1n) = n$ nuk tenton në zero; përkundrazi, rritet. Pra konvergjenca nuk është uniforme. Ky kundërshembull nuk pohon se uniformiteti është gjithmonë kusht i nevojshëm për kalimin nën integral: ekzistojnë edhe hipoteza të tjera të mjaftueshme.

Pse derivimi kërkon hipoteza më të forta?

Konvergjenca uniforme e funksioneve **nuk** garanton konvergjencën e derivateve, as derivueshmërinë e kufirit.

Kundërshembull. Në $[-1,1]$ vendosim $h_n(x) = \sqrt{x^2 + frac1n}$. Atëherë

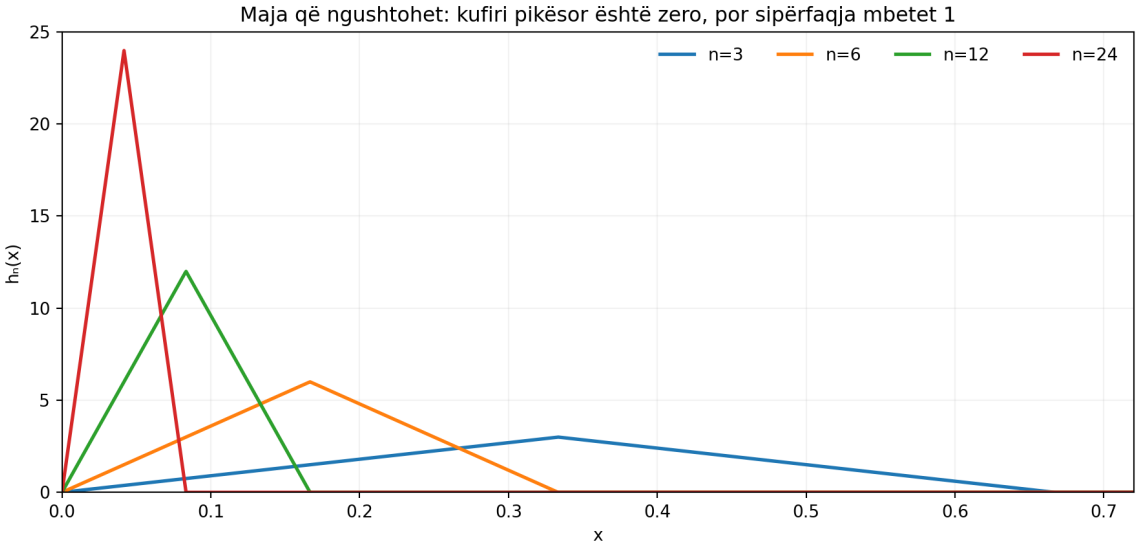


Figura 5: Funksione me mbështetje gjithnjë e më të ngushtë, me integral konstant.

$$0 \le h_n(x) - |x| = \frac{1/n}{\sqrt{x^2 + 1/n} + |x|} \le \frac{1}{\sqrt{n}}$$

për çdo $x \in [-1,1]$. Pra $h_n \to |x|$ uniformisht. Çdo h_n është i derivueshëm në $[-1,1]$, ndërsa $|x|$ nuk është i derivueshëm në 0.

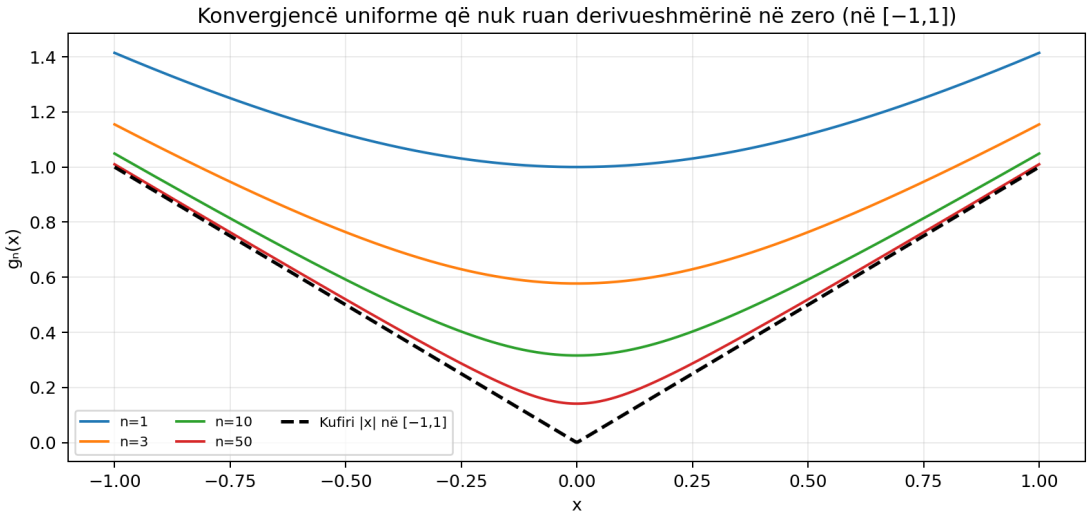


Figura 6: Funksione të lëmuara që afrojnë uniformisht $|x|$.

Teorema 3.5 (kalimi i limitit me derivimin). Le të jenë $f_n \in C^1([a,b])$. Supozojmë se (i) $f_n(x_0)$ konvergjon për një $x_0 \in [a,b]$; dhe (ii) f_n' konvergjon uniformisht në $[a,b]$ drejt g. Atëherë f_n konvergjon uniformisht në $[a,b]$ drejt një funksioni $f \in C^1([a,b])$ dhe $f' = g$.

Vërtetim. Shënojmë $\ell = \lim_n f_n(x_0)$. Nga teorema themelore e analizës,

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt.$$

Nga teorema e integrimit uniform, anët e djathta konvergjojnë uniformisht drejt

$$f(x) = \ell + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt.$$

Sepse g është kufir uniform i funksioneve të vazhdueshme, g është i vazhdueshëm. Teorema themelore e analizës jep $f' = g$. $\square$

Mekanizmi logjik i vërtetimit

Kur kërkohet të vërtetohet konvergjenca uniforme e një vargu funksional, metodologjia duhet të jetë e qartë:

1. Përcakto bashkësinë E dhe funksionin kufi f për çdo $x \in E$.
2. Formo gabimin $e_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$ dhe kontrollo varësinë e tij nga x.
3. Njehso $M_n = \sup_{x \in E} e_n(x)$ ose ndërto një kufi uniform $M_n \le a_n$, ku $a_n \to 0$.
4. Nëse pretendon jouniformitet, trego që $M_n \not\to 0$; në praktikë mund të ndërtosh pika $x_n \in E$ me $e_n(x_n) \ge \varepsilon_0 > 0$.
5. Për të kaluar në limit nën integral ose derivat, kontrollo veçmas hipotezat e teoremës përkatëse.

Krahasimi i tre nocioneve

Nocioni	Kushti kryesor	Çfarë siguron?
Pikësor	$N = N(\varepsilon, x)$	Limit në çdo pikë; jo domosdoshmërisht ruajtje e vazhdueshmërisë
Uniform	$N = N(\varepsilon)$	Vazhdimësi e kufirit të funksioneve të vazhdueshme; kalim i limitit me integralin në segment
Uniform i derivateve + një vlerë	$f_n' \to g$ uniformisht dhe $f_n(x_0)$ konvergjon	Kufiri është C^1 dhe $f' = g$

Shembuj të zgjedhur dhe analiza metodologjike

Shembull 3.1. Për $f_n(x) =$
$fracsin(nx)n$ në $\mathbb{R}$, kemi $|f_n(x)| \le$
$frac1n$. Prandaj $f_n \to 0$ uniformisht në gjithë $\mathbb{R}$, pavarësisht luhatjeve të shpejta. Derivatet $f_n'(x) = \cos(nx)$ nuk konvergojnë pikësisht në përgjithësi.

Shembull 3.2. Për $f_n(x) =$
$fracx1 + nx$ në $[0, 1]$ kemi $0 \le f_n(x) \le$

$frac1n+1$ sepse funksioni është rritës në x. Pra kufiri zero është uniform. Në $[0,\infty)$ supremumi është
$frac1n$ për $n \geq 1$, gjithashtu jep konvergjencë uniforme.

Shembull 3.3. Për $f_n(x) = x^n$ në $[0,1)$, kufiri zero është i vazhdueshëm, por $\sup_{x<1} x^n = 1$. Kjo vërteton se vazhdimësia e kufirit nuk mjafton për konvergjencën uniforme.

Gabime që duhen shmangur. (1) Të zëvendësohet supremumi me një maksimum që mund të mos arrihet. (2) Të vërtetohet vetëm konvergjenca për çdo pikë fikse dhe të shpallet uniforme. (3) Të supozohet se kufiri i vazhdueshëm provon uniformitetin. (4) Të derivohet limiti pa verifikuar hipotezat e teoremës së derivimit. (5) Të përdoret një grafik me një numër të fundmë vlerash si provë e një pohimi për çdo n.

Hartë konceptuale dhe udhëzues vendimmarrjeje

1. **Vargu funksional** $f_n : E \to \mathbb{R}$ $\longrightarrow$ identifiko kufirin pikësor f.
2. **Konvergjenca pikësore** $\longrightarrow$ verifiko për çdo x fiks.
3. **Konvergjenca uniforme** $\longrightarrow$ llogarit ose vlerëso $\sup_E |f_n - f|$; nëse kufiri nuk njihet, përdor kriterin e Koshit.
4. **Kalimi në limit** $\longrightarrow$ vazhdueshmëria dhe integrimi ruhen në kushtet e teoremave.
5. **Derivimi** $\longrightarrow$ kërkon kushte shtesë mbi derivatet dhe një vlerë bazë.
6. **Kundërshembujt** $\longrightarrow$ kontrollojnë domosdoshmërinë e hipotezave.

Ushtrime për punë të pavarur

1. Përcaktoni llojin e konvergjencës së $f_n(x) = x^n$ në $[-$
$frac12,$
$frac12]$, $[0,1)$ dhe $[0,1]$.
2. Provoni konvergjencën uniforme të $f_n(x) = x^n(1-x)$ në $[0,1]$ dhe gjeni normën ekzakte.
3. Studioni $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ në $[0,1]$. A konvergjon uniformisht?
4. Studioni $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ në $\mathbb{R}$ dhe sjelljen e derivateve në $x=0$.
5. Verifikoni kriterin uniform të Koshit për $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$ në $[0,1]$.
6. Ndërtoni një varg funksionesh të vazhdueshme që konvergjon pikësisht te një funksion i ndërprerë.
7. Provoni me pabarazi integrale që nga $f_n \to f$ uniformisht në $[a,b]$ rrjedh konvergjenca e integraleve.
8. Shpjegoni pse $\sqrt{x^2 + frac1n}$ nuk autorizon derivimin term pas termi në zero.

Literatura akademike

- W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd ed., McGraw–Hill, kapitulli mbi vargjet dhe seritë funksionale.
- T. M. Apostol, *Mathematical Analysis*, 2nd ed., Addison-Wesley, temat mbi konvergjencën uniforme.
- M. Ofendija, *Analiza Matematike II*, ShBLU, Tiranë, 2005 (si literaturë e përcaktuar për temat e serive në lëndë).