Leksioni 04 — Seritë e Taylor-it dhe aplikimet

Universiteti i Shkodrës “Luigj Gurakuqi” · Fakulteti i Shkencave të Natyrës · Departamenti i Matematikës
Autore dhe pedagoge: Prof. As. Dr. Siditë Duraj
Analizë Matematike III · CIKLI I në Matematikë · 2026–2027

1. Objektivat dhe lidhja me Leksionin 3

Në përfundim të kapitullit studenti duhet: (i) të ndërtojë polinomin e Taylor-it nga derivatet; (ii) të dallojë identitetin e Taylor-it me mbetje nga përfaqësimi si seri e pafundme; (iii) të vërtetojë formulën e mbetjes në formën e Lagranzhit; (iv) të kontrollojë kushtet e vlefshmërisë të zhvillimeve klasike; (v) të prodhojë kufij rigorozë të gabimit dhe të zgjedhë rendin e përafrimit.

Njohuritë paraprake janë derivatet e rendit të lartë, teorema e Rolle-it, teorema e vlerës mesatare, konvergjenca e serive numerike, seritë e fuqive dhe konvergjenca e tyre lokale. Ndryshe nga analiza e një serie formale, kalimi nga funksioni në serinë e tij kërkon një *argument shtesë* për mbetjen.

2. Polinomi i Taylor-it dhe kushtet e kontaktit

Përkufizim 4.1. Le të jetë f e derivueshme n herë në një rrethinë të pikës a. **Polinomi i Taylor-it me rend n rreth a** është

$$T_{n,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Për $a=0$ përdorim emrin *polinom i Maclaurin-it*. Polinomi plotëson $T_{n,a}^{(j)}(a) = f^{(j)}(a)$ për çdo $0 \le j \le n$. Kjo nuk thotë se $T_{n,a}(x) = f(x)$ për $x \neq a$.

Propozim 4.1 (unikësia). Polinomi me shkallë jo më të madhe se n që ka të njëjtat $n+1$ vlera të derivateve në a është unik.

Vërtetim. Nëse P, Q plotësojnë kushtet, $H = P - Q$ ka $H^{(j)}(a) = 0$ për $0 \le j \le n$. Duke shkruar $H(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j (x-a)^j$, marrim $j! c_j = H^{(j)}(a) = 0$; pra $H = 0$. $\square$

3. Formula e Taylor-it me mbetje

Teoremë 4.1 (forma e Lagranzhit). Le të jetë f e vazhdueshme në segmentin me skaje a, x dhe me derivate deri në rend $n+1$ në brendësinë e tij (me derivatet deri në rend n të përcaktuara në a). Atëherë ekziston ξ rreptësisht ndërmjet a dhe x i tillë që

$$f(x) = T_{n,a}(x) + R_{n,a}(x), \qquad R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Vërtetim (me Rolle të përgjithësuar). Për $x \neq a$ shënojmë $E = f(x) - T_{n,a}(x)$ dhe marrim $K = E/(x-a)^{n+1}$. Vendosim $F(t) = f(t) - T_{n,a}(t) - K(t-a)^{n+1}$. Kemi $F(x) = 0$ dhe

$F^{(j)}(a) = 0$ për $j = 0, \dots, n$. Duke zbatuar teoremën e Rolle-it $n+1$ herë (ose versionin e saj të përgjithësuar), ekziston ξ midis a dhe x me $F^{(n+1)}(\xi) = 0$. Meqë $T_{n,a}^{(n+1)} = 0$, del $f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)!K = 0$. Zëvendësimi i K jep formulën. Për $x = a$, mbetja është zero. □

Rrjedhim 4.1 (kufiri uniform i mbetjes). Nëse $|f^{(n+1)}(t)| \le M$ në segmentin ndërmjet a dhe x, atëherë

$$|R_{n,a}(x)| \le \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ky është një kufi *rigoroz*, jo një përafrim i marrë nga grafiku. Numri M duhet justifikuar për gjithë segmentin.

4. Kur Taylor-i përfaqëson vërtet funksionin?

Teoremë 4.2 (kriteri i mbetjes). Nëse f ka derivate të çdo rendi në një rrethinë të a dhe për një x të caktuar vlen $R_{n,a}(x) \to 0$ kur $n \to \infty$, atëherë

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Vërtetim. Nga identiteti i Taylor-it, $f(x) - T_{n,a}(x) = R_{n,a}(x)$. Duke kaluar në limit, $T_{n,a}(x) \to f(x)$; kjo është pikërisht përkufizimi i shumës së serisë. □

Kundërshembull vendimtar. Funksioni $g(x) = e^{-1/x^2}$ për $x \neq 0$ dhe $g(0) = 0$ është C^∞ në $\mathbb{R}$, por $g^{(n)}(0) = 0$ për çdo $n \ge 0$. Seria Taylor në zero është identikisht zero, ndërsa $g(x) > 0$ kur $x \neq 0$. Pra **pafundësia e derivueshmërisë nuk garanton analiticitetin**.

5. Zhvillimet klasike dhe bashkësitë e vlefshmërisë

Funksioni eksponencial. Për çdo $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Argument. Në segmentin ndërmjet 0 dhe x, $|e^t| \le e^{|x|}$; prandaj $|R_{n,0}(x)| \le e^{|x|}|x|^{n+1}/(n+1)! \to 0$ (kriteri i raportit për vargun e majorantëve).

Sinusi dhe kosinusi. Për çdo $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Derivatet e çdo rendi kanë vlerë absolute jo më të madhe se 1; formula e mbetjes jep konvergjencë drejt funksionit në çdo pikë reale.

Logaritmi. Për $-1 < x \leq 1$ kemi

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

Derivim i kontrolluar. Për $|x| < 1$, seria gjeometrike $1/(1+t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n$ konvergjon uniformisht në çdo segment kompakt të $(-1, 1)$, kështu lejohet integrimi term pas termi nga 0 te x. Në $x = 1$, seria alternuese konvergjon dhe shuma është $\ln 2$ nga teorema e Abelit për kalimin te skaji (ose nga një argument integral i mbetjes). Në $x = -1$ seria bëhet $-\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ dhe divergon; funksioni gjithashtu nuk është i përcaktuar atje.

Kujdes. Derivimi ose integrimi term pas termi kryhet vetëm në domenet ku justifikohet. Nuk lejohet zëvendësimi $x = 2$ në serinë e logaritmit.

6. Përafrime me gabim të certifikuar

Shembull 4.1. Të përafrohet $e^{1/2}$ me polinom rendi 4 rreth zeros dhe të vlerësohet gabimi.

$$T_{4,0}(1/2) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{384} = \frac{211}{128} = 1.6484375.$$

Në $[0, 1/2]$ kemi $e^t \leq e^{1/2} < 2$ (p.sh. nga monotonia dhe vlerësimi standard $e^{1/2} < 2$). Prandaj

$$\left| e^{1/2} - \frac{211}{128} \right| \leq \frac{2(1/2)^5}{5!} = \frac{1}{1920} < 0.000521.$$

Ky kufi është konservativ, por matematikisht i garantuar. Vlera numerike e një programi nuk është provë e pabarazisë.

Shembull 4.2. Për $0 \leq x \leq 1$, seria e logaritmit është alternuese me madhësi të termave $b_n = x^n/n$ që bien në zero; prandaj, pas N termash,

$$\left| \ln(1+x) - \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \right| \leq \frac{x^{N+1}}{N+1}.$$

Ky është vlerësimi i Leibnizit; nuk duhet aplikuar pa monotoninë e kufizave absolute.

7. Gabimet metodologjike më të zakonshme

1. **Barazimi i funksionit me serinë pa kontroll të mbetjes.** Derivatet në një pikë përcaktojnë koeficientët, por jo domosdoshmërisht shumën.
2. **Heqja e domenit të vlefshmërisë.** Shënimi $\ln(1+x) = x - x^2/2 + \cdots$ pa kushtin $-1 < x \leq 1$ është i paplotë.
3. **Zëvendësimi i gabimit real me madhësinë e termit të parë të lënë jashtë.** Ky vlerësim është i vlefshëm për seri alternuese vetëm nën hipotezat e kriterit të Leibnizit.

4. **Përdorimi i një kufiri M pa e provuar.** Kufiri mbi derivatin duhet të jetë i vlefshëm në të gjithë segmentin relevant.
5. **Keqinterpretimi i një Figura numerike.** Një grafik i $T_n(x)$ për disa n nuk provon që mbetja shkon në zero.

8. Ushtrime të propozuara për seminare

1. Provoni nga përkufizimi që $T_{n,a}$ është i vetmi polinom me kushtet e kontaktit në a.
2. Shkruani $T_{5,0}$ për sin x dhe vlerësoni mbetjen në $x = 0.4$.
3. Përdorni formën e Lagranzhit për të certifikuar përafrimin e $\cos(0.2)$ me $1 - x^2/2$.
4. Gjeni sa terma të serisë alternuese të $\ln 2$ mjaftojnë që gabimi të jetë nën 10^{-3}.
5. Shpjegoni pse funksioni i sheshtë $g(x)$ nuk është analitik në 0 edhe pse është C^∞.

9. Literatura dhe standardi i argumentimit

Literaturë orientuese: Ofendija, *Analiza Matematike II*, kapitulli mbi formulën dhe seritë e Taylor-it; Apostol, *Mathematical Analysis*, kapitulli për zhvillimet Taylor. Teoremat dhe ushtrimet janë paraqitur si material didaktik për kontroll akademik. Figura numerike apo laboratorët shërbejnë për interpretim, jo si zëvendësim i vërtetimeve.