UNIVERSITETI I SHKODRËS “LUIGJ GURAKUQI”
Fakulteti i Shkencave të Natyrës · Departamenti i Matematikës

Seritë funksionale dhe kriteret e konvergjencës

LEKSIONI 04 · CIKLI I NË MATEMATIKË · 2026–2027

Autore dhe pedagoge: Prof. As. Dr. Siditë Duraj

Pyetja udhëheqëse. Kur mund të mblidhen pafundësisht shumë funksione dhe të garantohet që shuma është e përafrueshme me një kontroll të njëtrajtshëm të gabimit? Ky kapitull ndërton përgjigjen me përkufizime të sakta, vërtetime dhe kundërshembuj.

1 Objektivat dhe lidhja me vargjet funksionale

Studenti duhet të përkufizojë serinë funksionale përmes shumave të pjesshme; të dallojë konvergjencën pikësore, absolute dhe uniforme; të provojë kriterin uniform të Koshit; të zbatojë kriterin majorant të Vajershtrasit (Weierstrass); të shpjegojë pse kriteri është i mjaftueshëm por jo i domosdoshëm; dhe të ndërtojë kundërshembuj që pengojnë përgjithësime të gabuara.

Le të jetë $E \subseteq \mathbb{R}$, $E \neq \varnothing$, dhe $u_n : E \to \mathbb{R}$ funksione. Për çdo N përcaktojmë $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} u_n(x)$. Pra, *seria funksionale* është një mënyrë e veçantë për të studiuar vargun funksional (S_N), jo vargun (u_n).

2 Përkufizimet themelore

Përkufizim 2.1 (Konvergjenca pikësore)**.** Seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ konvergjon pikësisht në E nëse për çdo $x \in E$, vargu numerik $(S_N(x))$ ka kufi të fundmë $S(x)$. Logjikisht:

$$\forall x \in E\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N_0 = N_0(x,\varepsilon)\ \forall N \geq N_0 : \quad |S_N(x) - S(x)| < \varepsilon.$$

Përkufizim 2.2 (Konvergjenca uniforme)**.** Seria konvergjon uniformisht në E drejt S nëse

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_0 = N_0(\varepsilon)\ \forall N \geq N_0\ \forall x \in E : \quad |S_N(x) - S(x)| < \varepsilon.$$

Kur funksionet $S_N - S$ janë të kufizuara në E, kjo është ekuivalente me $\|S_N - S\|_\infty \to 0$.

Përkufizim 2.3 (Konvergjenca absolute)**.** Seria konvergjon absolutisht në pikën x nëse $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)| < \infty$. Ajo konvergjon absolutisht në E kur kjo vlen për çdo $x \in E$. Kjo *nuk* nënkupton domosdoshmërisht konvergjencë uniforme në E.

Hierarkia logjike: konvergjenca uniforme $\Rightarrow$ konvergjenca pikësore; konvergjenca absolute pikësore $\Rightarrow$ konvergjenca pikësore. Në përgjithësi asnjëra nga dy të parat nuk nënkupton tjetrën.

3 Kriteri uniform i Koshit

Teoremë 3.1 (Kriteri uniform i Koshit)**.** *Seria $\sum u_n$ konvergjon uniformisht në E atëherë dhe vetëm atëherë kur*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_0 \; \forall m > n \geq N_0 \; \forall x \in E : \qquad \left| \sum_{k=n+1}^{m} u_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Vërtetim. Nëse $S_N \to S$ uniformisht, për $m > n \geq N_0$ kemi

$$|S_m(x) - S_n(x)| \leq |S_m(x) - S(x)| + |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$$

duke zbatuar për secilin diferencë kufirin $\varepsilon/2$. Anasjelltas, për çdo x kushti e bën $(S_N(x))$ varg të Koshit në $\mathbb{R}$, ndaj ekziston $S(x) = \lim_N S_N(x)$. Duke mbajtur $n \geq N_0$ të fiksuar dhe duke kaluar në limit $m \to \infty$ te $|S_m(x) - S_n(x)| < \varepsilon/2$, marrim $|S(x) - S_n(x)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$ për çdo $x \in E$. Pra konvergjenca është uniforme. □

Propozim 3.2 (Kushti i domosdoshëm uniform)**.** *Nëse $\sum u_n$ konvergjon uniformisht në E, atëherë $u_n \to 0$ uniformisht në E.*

Vërtetim. $u_n = S_n - S_{n-1}$; prandaj $|u_n(x)| \leq |S_n(x) - S(x)| + |S_{n-1}(x) - S(x)|$, dhe të dy termat priren uniformisht në zero. □

Vërejtje 3.3. E kundërta është e rreme: $u_n(x) = \dfrac{1}{n}$ për çdo $x \in E$ konvergjon uniformisht në zero, por seria harmonike divergon në çdo pikë.

4 Kriteri majorant i Vajershtrasit

Teoremë 4.1 (Kriteri M i Vajershtrasit)**.** *Nëse ekzistojnë numra $M_n \geq 0$ të tillë që $|u_n(x)| \leq M_n$ për çdo $x \in E$, dhe $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$, atëherë $\sum u_n$ konvergjon uniformisht dhe absolutisht në E. Për më tepër, për çdo N:*

$$\sup_{x \in E} |S(x) - S_N(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} M_n.$$

Vërtetim. Për $m > n$ dhe çdo x,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} u_k(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{m} |u_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{m} M_k.$$

Djathtas është mbetja e një serie numerike konvergjente, e cila bëhet arbitrarisht e vogël pavarësisht nga x. Kriteri uniform i Koshit garanton konvergjencën uniforme. Për çdo x, kriteri i krahasimit siguron $\sum |u_n(x)| < \infty$. Duke kaluar $m \to \infty$ në pabarazinë e mësipërme me $n = N$ përfitohet vlerësimi i mbetjes. □

Shembull 4.2 (Seri me parametër)**.** Në $E = [-1, 1]$, $u_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^2}$. Meqë $|u_n(x)| \le \dfrac{1}{n^2}$ dhe $\sum n^{-2}$ konvergjon, seria është uniformisht dhe absolutisht konvergjente. Për $N \ge 1$:

$$\|S - S_N\|_\infty \le \sum_{n>N} \frac{1}{n^2} \le \int_N^\infty \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{N}.$$

5 Pse kriteri M nuk është i domosdoshëm

Shembull 5.1 (Uniforme, por pa majorant të mbledhshëm)**.** Në $E = [0, 1]$, merrni $u_n(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$. Për çdo $x \in [0, 1]$, kufizat $b_n(x) = x^n/n$ janë jonegative, zbritëse ndaj n dhe

$$0 \le b_n(x) \le \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{uniformisht në } x.$$

Përmes vlerësimit të mbetjes së serisë alternuese (i vlefshëm njëtrajtshëm në x),

$$|S(x) - S_N(x)| \le \frac{x^{N+1}}{N+1} \le \frac{1}{N+1}.$$

Pra seria konvergjon uniformisht në $[0, 1]$. Megjithatë $\sup_{x\in E} |u_n(x)| = 1/n$ dhe $\sum \dfrac{1}{n}$ divergon. Për pasojë nuk ekziston asnjë majorant numerik i mbledhshëm $M_n \ge \sup_E |u_n|$.

6 Një kundërshembull thelbësor

Shembull 6.1 (Konvergjenca pikësore nuk mjafton)**.** Në $E = [0, 1)$ seria $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergjon për çdo x drejt $S(x) = 1/(1 - x)$. Shumat e pjesshme janë

$$S_N(x) = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x}, \qquad |S(x) - S_N(x)| = \frac{x^{N+1}}{1 - x}.$$

Për çdo N supremumi i gabimit në $[0, 1)$ është $+\infty$. Prandaj konvergjenca nuk është uniforme. Në çdo $[0, r]$ me $0 < r < 1$ kemi

$$\sup_{0\le x\le r} |S(x) - S_N(x)| \le \frac{r^{N+1}}{1 - r} \to 0,$$

pra konvergjenca është uniforme në çdo segment të tillë. Ky është dallimi ndërmjet konvergjencës uniforme *lokale* dhe uniforme në të gjithë fushën.

7 Kriteri uniform i Diriklesë: një zgjerim

Teoremë 7.1 (Diriklesë uniforme, formulim praktik). *Le të jenë* $a_n, b_n : E \to \mathbb{R}$ *dhe* $A_N(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k(x)$. *Supozojmë se ekziston* $C > 0$ *i tillë që* $|A_N(x)| \le C$ *për çdo* N, x*; se për çdo* x, $b_n(x) \ge 0$ *është jobrritës ndaj* n*; dhe se* $\sup_{x\in E} b_n(x) \to 0$. *Atëherë* $\sum a_n(x)b_n(x)$ *konvergjon uniformisht në* E.

Vërtetim. Për $m > n$, duke vendosur $B_k(x) = \sum_{j=n+1}^{k} a_j(x)$ kemi $|B_k(x)| \le 2C$. Nga mbledhja sipas pjesëve,

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k = B_m b_m + \sum_{k=n+1}^{m-1} B_k(b_k - b_{k+1}).$$

Prandaj, meqë b_k është jobrritës dhe jonegativ,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k(x)b_k(x)\right| \le 2C\left(b_m(x) + \sum_{k=n+1}^{m-1}(b_k(x) - b_{k+1}(x))\right) = 2Cb_{n+1}(x).$$

Kufiri i djathtë priret në zero uniformisht në x; zbatimi i Teoremës 3.1 e përfundon vërtetimin. □

Vërejtje 7.2. Kufizimi uniform i shumave të pjesshme A_N është hipotezë thelbësore. Nuk mjafton që $A_N(x)$ të jetë i kufizuar për çdo x me konstante që varet nga x.

8 Figura dhe interpretime

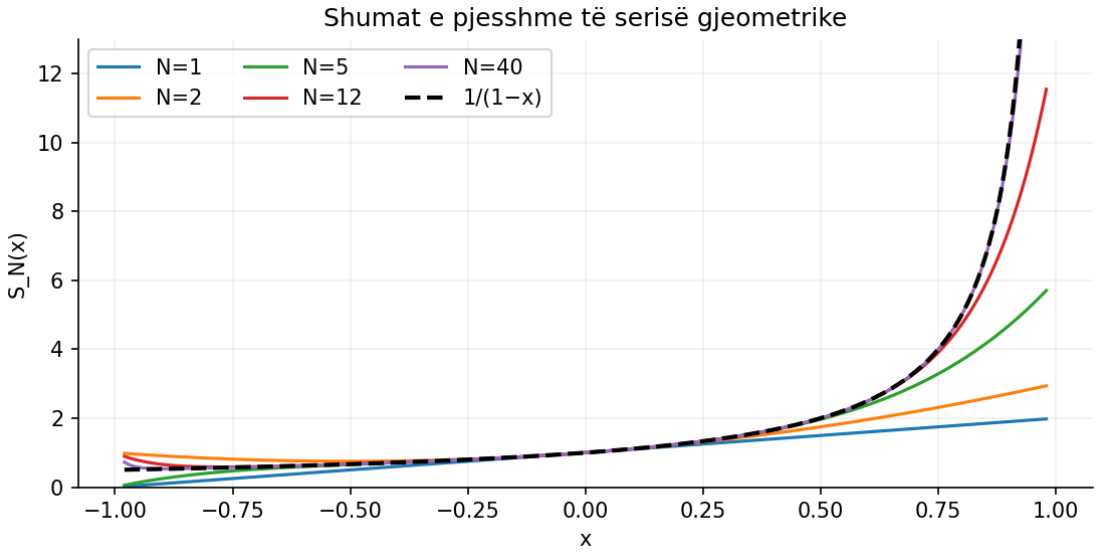


Figura 1: Shuma të pjesshme të serisë gjeometrike dhe shuma e saj. Afrimi nuk është uniform në $[0, 1)$, por është uniform në çdo $[0, r]$, $r < 1$.

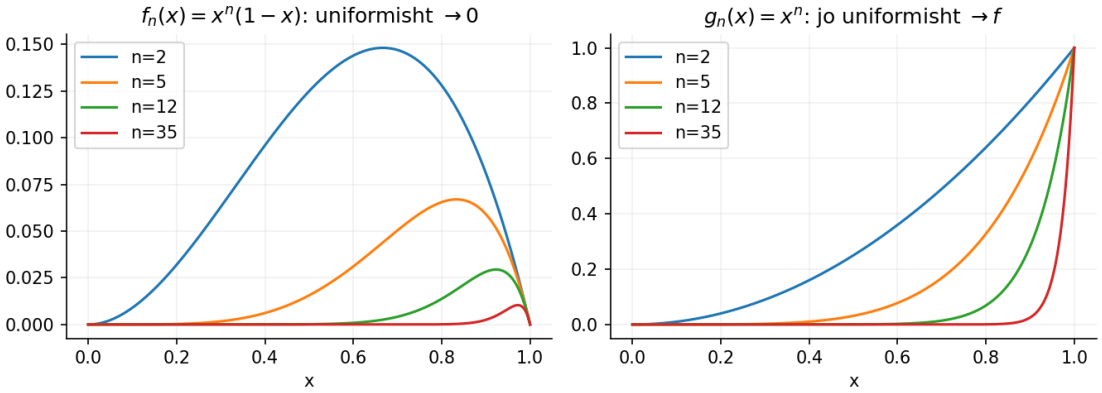


Figura 2: Kufizat e vargjeve funksionale mund të kenë sjellje uniforme të ndryshme. Vëzhgimi grafik nuk zëvendëson provën me supremum.

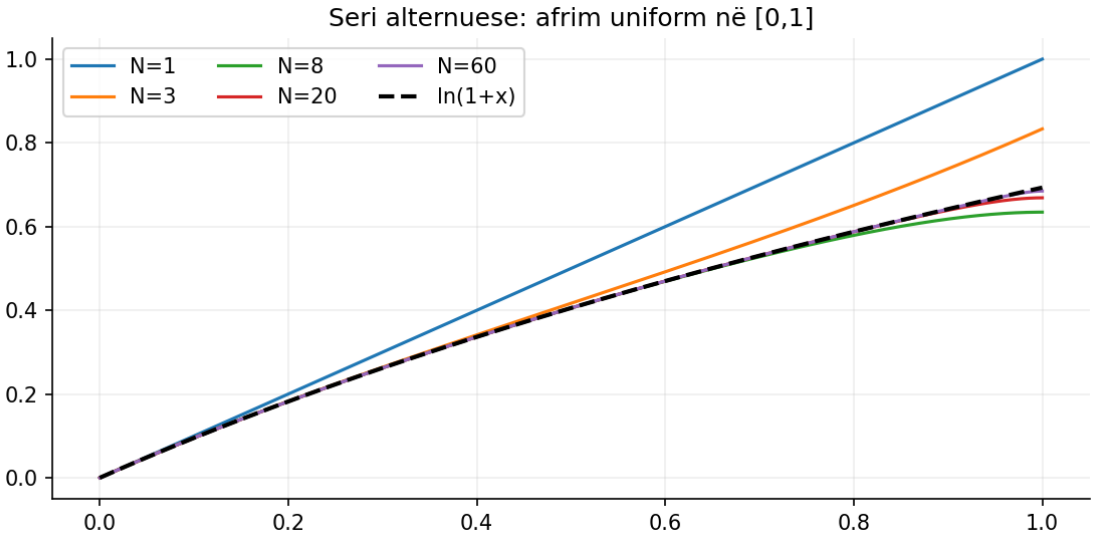


Figura 3: Shumat e pjesshme të $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}x^n/n$ në $[0,1]$ dhe kufiri $\ln(1+x)$.

9 Kriteri uniform i Abelit

Teoremë 9.1 (Kriteri uniform i Abelit)**.** *Supozoni se* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *konvergjon uniformisht në* E *dhe se, për çdo* $x \in E$*, vargu* $b_n(x)$ *është jonegativ dhe jobrritës sipas* n*. Nëse ekziston* $B > 0$ *i tillë që* $0 \le b_n(x) \le B$ *për çdo* n *dhe* $x \in E$*, atëherë seria* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ *konvergjon uniformisht në* E*.*

Vërtetim. Nga kriteri uniform i Koshit, për çdo $\varepsilon > 0$ mund të zgjedhim N_0 të tillë që për çdo $m \ge k \ge N_0$ dhe $x \in E$ të kemi

$$\left| \sum_{j=k}^{m} a_j(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2B} \qquad (B > 0).$$

Për $m \ge n \ge N_0$ vendosim $A_k^{(n)}(x) = \sum_{j=n}^{k} a_j(x)$. Nga mbledhja sipas pjesëve,

$$\sum_{k=n}^{m} a_k b_k = A_m^{(n)} b_m + \sum_{k=n}^{m-1} A_k^{(n)}(b_k - b_{k+1}).$$

Për shkak të monotonisë dhe jonegativitetit të b_k, duke përdorur $|A_k^{(n)}| < \varepsilon/(2B)$, përfitojmë

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k(x)b_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2B} \left(b_m + \sum_{k=n}^{m-1} (b_k - b_{k+1}) \right) = \frac{\varepsilon}{2B} b_n \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Zbatohet kriteri uniform i Koshit. □

Shembull 9.2 (Një zbatim i Abelit)**.** Le të jetë $E = [0, 1]$, $a_n(x) = (-1)^{n-1}/n$ dhe $b_n(x) = x^n$. Seria numerike $\sum a_n$ konvergjon, ndaj seria funksionale konstante $\sum a_n(x)$ konvergjon uniformisht në E. Funksionet x^n janë jonegative, jobrritëse në n dhe të kufizuara nga 1. Pra, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n/n$ konvergjon uniformisht në $[0, 1]$.

10 Konvergjenca absolute dhe uniforme: marrëdhënie jo të krahasueshme

Propozim 10.1. *As konvergjenca absolute në çdo pikë nuk nënkupton domosdoshmërisht konvergjencën uniforme, as konvergjenca uniforme nuk nënkupton domosdoshmërisht konvergjencën absolute në çdo pikë.*

Vërtetim me kundërshembuj. (i) Seria $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ në $[0, 1)$ është absolutisht konvergjente në çdo pikë, por jo uniformisht konvergjente, sepse $\sup_{0 \le x < 1} |S - S_N| = +\infty$. (ii) Seria e funksioneve konstante $u_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, $x \in E$, konvergjon uniformisht në çdo bashkësi jo të zbrazët E, sepse shumat e pjesshme janë të pavarura nga x dhe seria numerike alternuese konvergjon. Ajo nuk konvergjon absolutisht në asnjë pikë, pasi $\sum |u_n(x)| = \sum 1/n = +\infty$. □

Pikë metodologjike. Në klasifikimin e një serie funksionale, kontrolloni në mënyrë të veçantë (a) konvergjencën pikësore, (b) absolutisht për çdo pikë dhe (c) uniformisht në bashkësinë e specifikuar. Asnjëra nga këto pyetje nuk zëvendëson automatikisht tjetrën.

11 Sa terma nevojiten për një saktësi të paracaktuar?

Le të jetë $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)/n^2$ në $\mathbb{R}$. Kriteri majorant jep

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |S(x) - S_N(x)| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \le \int_N^{\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{N}.$$

Për të garantuar gabim *jo më të madh se* 10^{-3}, mjafton $N \ge 1000$. Kjo është një garanci analitike e vlefshme për të gjitha vlerat e x, dhe jo një përfundim i nxjerrë nga disa pika të grafikut.

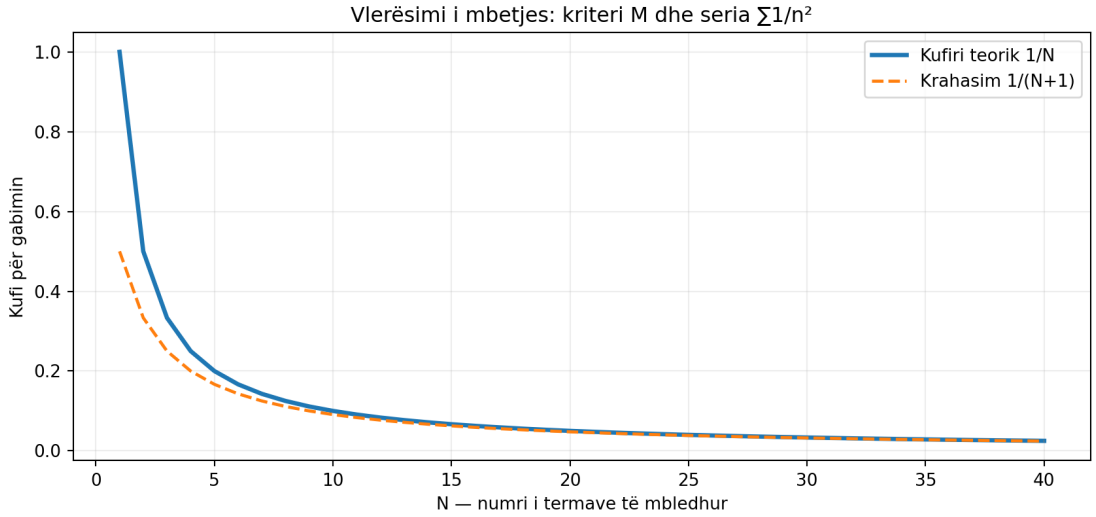


Figura 4: Kontrolli teorik i mbetjes së serisë $\sum \sin(nx)/n^2$. Grafiku paraqet kufij të garantuar, jo gabimin e matur numerikisht.

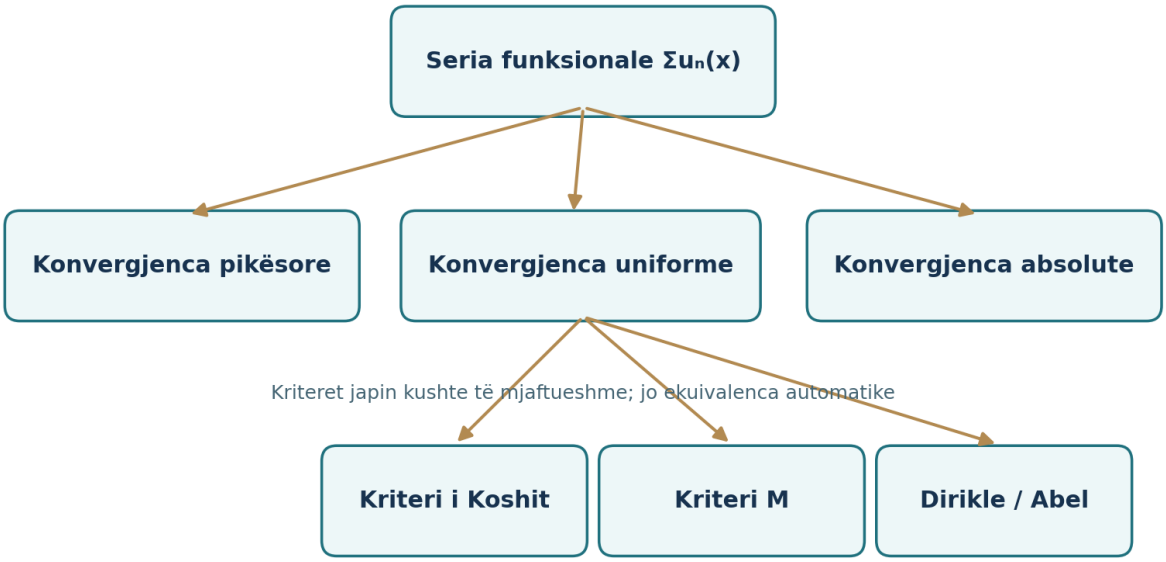


Figura 5: Organizimi i koncepteve; shigjetat tregojnë rrugë studimi dhe jo implikime matematikore në çdo rast.

12 Hartë konceptuale e kritereve

13 Udhëzues për zgjedhjen e kriterit

Harta konceptuale e arsyetimit. (1) Formo $S_N = \sum_{n\le N} u_n$. (2) Kontrollo nëse ka një majorant $|u_n| \le M_n$ me $\sum M_n < \infty$; nëse po, përdor kriterin M. (3) Në mungesë të tij, kontrollo kriterin uniform të Koshit ose strukturën alternuese/Diriklesë. (4) Për të përjashtuar uniformitetin, provo të gjesh $\sup_E |S - S_N| \not\to 0$ ose $\sup_E |u_n| \not\to 0$. (5) Mos e përziej konvergjencën uniforme me konvergjencën absolute pikësore.

14 Gabime të zakonshme dhe vlerësim kritik

1. **Kufiza $u_n \to 0$ garanton serinë:** e rreme, edhe uniformisht.
2. **Konvergjenca absolute në çdo pikë garanton uniformitetin:** e rreme.
3. **Dështimi i kriterit M provon divergjencën:** e rreme; kriteri është vetëm i mjaftueshëm.
4. **Një grafik me 100 terma provon uniformitetin:** e rreme; kërkohet argument për çdo $\varepsilon > 0$.
5. **Uniformiteti në çdo $[0, r]$ me $r < 1$ garanton uniformitetin në $[0, 1)$:** e rreme.

15 Shënime pedagogjike për interpretimin e kritereve

Në zgjidhje duhet deklaruar bashkësia E *përpara* përdorimit të supremumit dhe duhet dalluar një kriter i mjaftueshëm nga një karakterizim ekuivalent. Për Dirikleně dhe Abelin, argumenti i mbledhjes sipas pjesëve duhet shoqëruar me kufij që janë të pavarur nga x.

16 Pyetje të pavarura

1. A konvergjon uniformisht $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ në $[-1,1]$? Jepni vlerësimin e mbetjes.
2. Përse $\sum_{n\geq 0} x^n$ nuk konvergjon uniformisht në $[0,1)$?
3. Tregoni se $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}x^n/n$ konvergjon uniformisht në $[0,1]$ pa përdorur kriterin M.
4. Përcaktoni nëse $\sum_{n\geq 1}(x^n - x^{n+1})$ konvergjon uniformisht në $[0,1]$.
5. Jepni një shembull ku $u_n \to 0$ uniformisht por $\sum u_n$ nuk konvergjon pikësisht.

Literaturë orientuese

W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd ed., kapitulli 7; T. M. Apostol, *Mathematical Analysis*, 2nd ed., kapitujt mbi vargjet dhe seritë e funksioneve. Materialet e leksionit duhen trajtuar së bashku me Leksionin 3 mbi vargjet funksionale dhe me Leksionin 5 mbi kalimin në limit.