Leksioni 05 — Seritë trigonometrike

Ortogonaliteti, koeficientët e Fourier-it dhe polinomet trigonometrike

Prof. As. Dr. Siditë Duraj

Universiteti i Shkodrës “Luigj Gurakuqi” · CIKLI në Matematikë · 2026–2027

Qëllimi dhe rezultatet e të nxënit

Ky kapitull ndërton bazën matematikore të përfaqësimit trigonometrik të funksioneve periodike. Duhet dalluar **ekzistenca e koeficientëve** nga **konvergjenca e serisë trigonometrike**. Llogaritja e integraleve që prodhojnë koeficientët, në vetvete, nuk provon që seria përfaqëson funksionin në çdo pikë.

Pas studimit studenti duhet të (i) provojë relacionet e ortogonalitetit; (ii) ndërtojë koeficientët e një zhvillimi trigonometrik; (iii) shfrytëzojë simetrinë çift/tek; (iv) njehsojë polinomin trigonometrik të rendit N; (v) përdorë interpretimin si projeksion ortogonal në hapësirën L^2; dhe (vi) dallojë përfundimet e sigurta nga pohimet që kërkojnë teoremat e konvergjencës të Leksionit 6.

Parakushte. Integrali i Riemann-it, identitetet trigonometrike, integrimi me pjesë, linearitet i integralit, funksionet çift dhe tek, shumat e fundme, nocioni i produktit skalar.

1. Nga sinjalet periodike te polinomet trigonometrike

Një funksion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ quhet 2π-periodik nëse $f(x + 2\pi) = f(x)$ për çdo x. Për funksione të tilla, sistemi natyror i funksioneve bazë është

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots .$$

Përkufizim 5.1. Polinomi trigonometrik i rendit jo më të madh se N ka formën

$$T_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big).$$

Koeficientët janë numra realë. Përderisa shuma ka një numër të fundmë termash, T_N është i vazhdueshëm, i derivueshëm dhe 2π-periodik; ky pohim **nuk** mund të transfero-

het pa argument te një seri e pafundme.

Një seri trigonometrike është shprehja formale

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

E trajtojmë si seri funksionesh: çdo mënyrë konvergjence duhet deklaruar shprehimisht (pikësore, uniforme ose në normën L^2).

2. Teorema e ortogonalitetit

Teorema 5.1 (ortogonaliteti në $[-\pi, \pi]$). Për $m, n \geq 1$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx)\, dx = \begin{cases} \pi, & m = n, \\ 0, & m \neq n, \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx)\, dx = \begin{cases} \pi, & m = n, \\ 0, & m \neq n, \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx)\, dx = 0.$$

Për më tepër, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\, dx = 0$, kurse $\int_{-\pi}^{\pi} 1\, dx = 2\pi$.

Vërtetim. Nga identitetet produkt–shumë:

$$2\cos(nx)\cos(mx) = \cos((n-m)x) + \cos((n+m)x),$$

$$2\sin(nx)\sin(mx) = \cos((n-m)x) - \cos((n+m)x),$$

$$2\sin(nx)\cos(mx) = \sin((n+m)x) + \sin((n-m)x).$$

Për çdo numër të plotë $k \neq 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\, dx = 0$, ndërsa integrali i $\sin(kx)$ është zero nga pariteti. Në rastin $n = m$, në identitetin e parë ose të dytë shfaqet termi konstant 1 me integral 2π, dhe faktori $1/2$ prodhon π. Kështu provohen të tre formulat. $\square$

Vërejtje metodologjike. Integrali i prodhimit është zero, por kjo nuk nënkupton se funksionet nuk kanë pika ku të dyja janë të ndryshme nga zero. Ortogonaliteti është pronë integrale, jo pikësore.

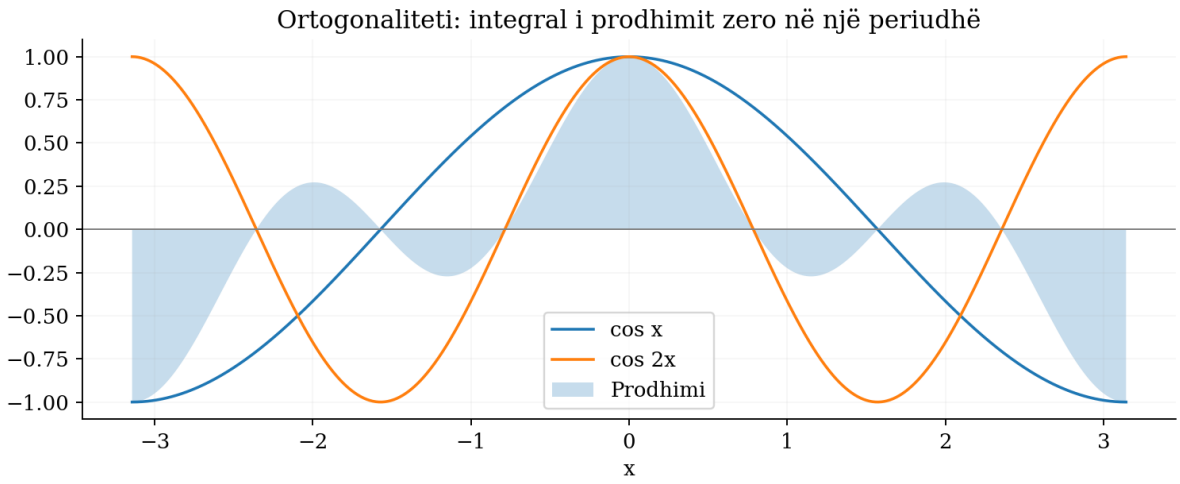


Figura 1: Grafiku i prodhimit të dy harmonikëve dhe anulimi i sipërfaqeve të nënshkruara.

3. Koeficientët e Fourier-it: nxjerrja e formulave

Teorema 5.2 (uniciteti i koeficientëve në një përfaqësim të fundmë). Nëse $f = T_N$ është një polinom trigonometrik, atëherë koeficientët e tij përcaktohen në mënyrë unike nga

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx},$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx}, \qquad \boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx}.$$

Vërtetim. Integrimi i identitetit $f(x) = T_N(x)$ eliminon të gjitha harmoniket jo konstante dhe jep $\int f = \pi a_0$. Shumëzimi i identitetit me $\cos(mx)$, ndjekur nga integrimi, eliminon çdo term përveç $a_m \cos^2(mx)$, prandaj $\int f\cos(mx) = \pi a_m$ nëse $1 \le m \le N$. Analogjikisht, $\int f \sin(mx) = \pi b_m$. Kjo provon formulat dhe unicitetin. □

Përkufizim 5.2 (koeficientët për një funksion të integrueshëm). Nëse f është 2π-periodik dhe i integrueshëm në $[-\pi, \pi]$, integralet e mësipërme **përkufizojnë** koeficientët e Fourier-it edhe nëse nuk dihet ende nëse seria e Fourier-it e f konvergjon drejt f.

Kjo ndarje logjike është thelbësore. Në veçanti, nuk lejohet të shkruhet automatikisht $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\ge1}(a_n\cos nx + b_n \sin nx)$ për çdo funksion të integrueshëm dhe për çdo x pa vendosur një teoremë konvergjence.

4. Simetria e funksionit dhe kursimi i njehsimeve

Teorema 5.3. Nëse f është çift, $f(-x) = f(x)$, atëherë të gjithë $b_n = 0$ dhe

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \quad (n \geq 0).$$

Nëse f është tek, $f(-x) = -f(x)$, atëherë $a_n = 0$ për çdo $n \geq 0$ dhe

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx.$$

Vërtetim. Produkti i një funksioni çift me sinusin tek është tek dhe ka integral zero në interval simetrik. Po ashtu, produkti i një funksioni tek me kosinusin çift është tek. Produktet me paritet çift integrohen në $[-\pi, \pi]$ si dyfishi i integralit në $[0, \pi]$. □

Kujdes. Pariteti i f gjykohet në intervalin simetrik dhe për zgjerimin periodik të zgjedhur; nuk përcaktohet nga pamja e vetëm një gjysmëperiudhe pa deklaruar zgjerimin.

5. Interpretimi si projeksion optimal në hapësirën L^2

Për funksione reale katror-integrueshme vendosim produktin skalar

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\, dx.$$

Norma e bazës është $\|1\|^2 = 2$ dhe $\|\cos(nx)\|^2 = \|\sin(nx)\|^2 = 1$. Nga Teorema 5.1, funksionet e bazës janë reciprokisht ortogonale.

Teorema 5.4 (përafrimi optimal trigonometrik). Le të jetë S_N polinomi trigonometrik i rendit N, i ndërtuar nga koeficientët e Fourier-it të $f \in L^2[-\pi, \pi]$. Për çdo polinom trigonometrik P_N të rendit jo më të madh se N vlen

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_N(x)|^2 dx \;\leq\; \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - P_N(x)|^2 dx.$$

Vërtetim. Nga përkufizimi i koeficientëve, $f - S_N$ është ortogonal me secilin element të hapësirës së polinomeve trigonometrike të rendit N. Duke shkruar $f - P_N = (f - S_N) + (S_N - P_N)$, dy anët në shumën e fundit janë ortogonale. Sipas identitetit të Pitagorës në hapësirën me produkt skalar:

$$\|f - P_N\|^2 = \|f - S_N\|^2 + \|S_N - P_N\|^2 \geq \|f - S_N\|^2.$$

Kjo provon pohimin. □

Pasojë (pabarazia e Bessel-it). Me zgjedhjen e mësipërme të normalizimit, për çdo $N \geq 1$:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Vërtetim. Vendosni $P_N = 0$ te identiteti i Pitagorës dhe llogaritni $\|S_N\|^2$ me ortogonalitetin e bazës. □

Kjo pabarazi është një pohim **i fundëm** dhe nuk kërkon ende teoremën e plotësisë së bazës trigonometrike ose identitetin e Parseval-it.

6. Shembulli I: funksioni sharrë $f(x) = x$

Në $(-\pi, \pi)$ marrim $f(x) = x$ dhe zgjerimin e tij 2π-periodik. Funksioni është tek, kështu që $a_n = 0$ për çdo n. Për $n \geq 1$,

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx)\, dx.$$

Integrimi me pjesë, me $u = x$, $dv = \sin(nx)dx$, jep

$$\int_0^{\pi} x \sin(nx) dx = \left[-\frac{x \cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} + \left[\frac{\sin(nx)}{n^2} \right]_0^{\pi} = -\frac{\pi(-1)^n}{n}.$$

Prandaj

$$\boxed{b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}}.$$

Seria e Fourier-it e lidhur me funksionin sharrë është

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx).$$

Interpretimi. Figura ilustron afrimin brenda intervalit. Në $\pm\pi$ zgjerimi periodik ka kërcime; barazia pikësore atje nuk duhet nxjerrë nga vizualizimi. Kushtet dhe vlerat e limiteve shqyrtohen në Leksionin 6.

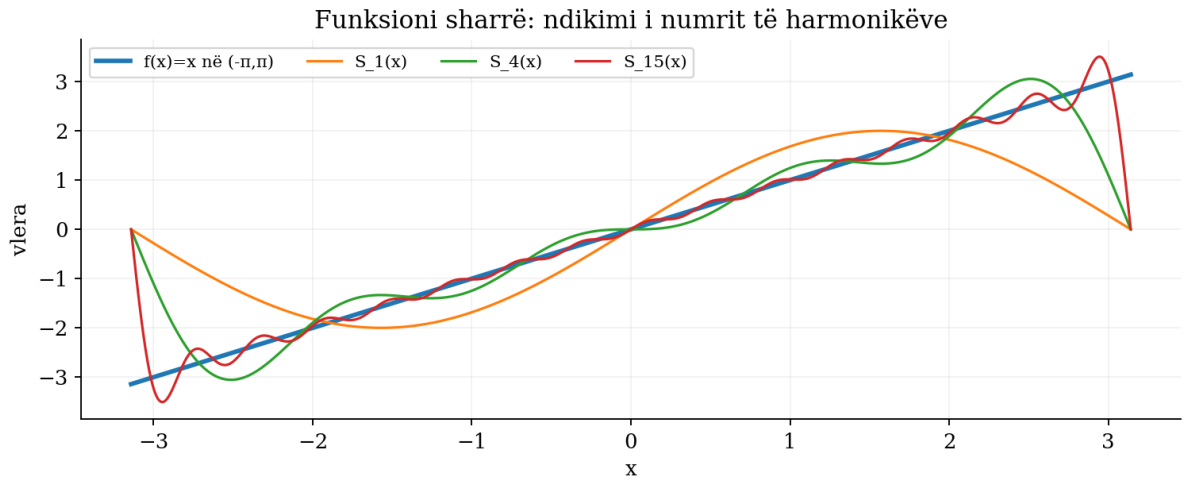


Figura 2: Shumat e pjesshme të serisë së Fourier-it për funksionin sharrë.

7. Shembulli II: vala katrore

Vendosim $f(x) = -1$ për $-\pi < x < 0$ dhe $f(x) = 1$ për $0 < x < \pi$, me zgjerim 2π-periodik. Vlerat e vendosura në pikat e kërcimit nuk ndryshojnë koeficientët e Fourier-it. Funksioni është tek dhe

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nx)dx = \frac{2}{\pi n}(1-(-1)^n).$$

Prandaj $b_n = 0$ kur n është çift dhe $b_n = 4/(\pi n)$ kur n është tek. Kështu seria formale është

$$\boxed{\frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right).}$$

Për praninë e luhatjeve pranë kërcimeve përdoret termi **dukuri e Gibbs-it**. Një grafik me harmonikë të fundëm nuk e provon as kufirin e tejkalimit, as konvergjencën pikësore. Në Leksionin 6 do të saktësojmë çfarë konvergon dhe në çfarë kuptimi.

8. Shembulli III: funksioni çift $f(x) = |x|$

Për $-\pi \le x \le \pi$, f është çift; të gjithë $b_n = 0$ dhe

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \pi.$$

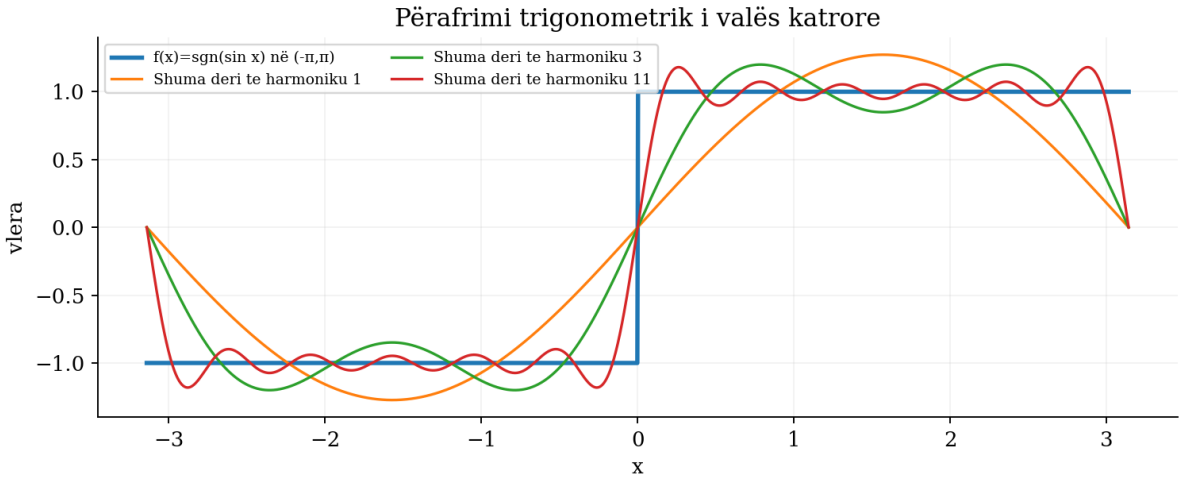


Figura 3: Përafrimi i valës katrore dhe luhatjet pranë kërcimit.

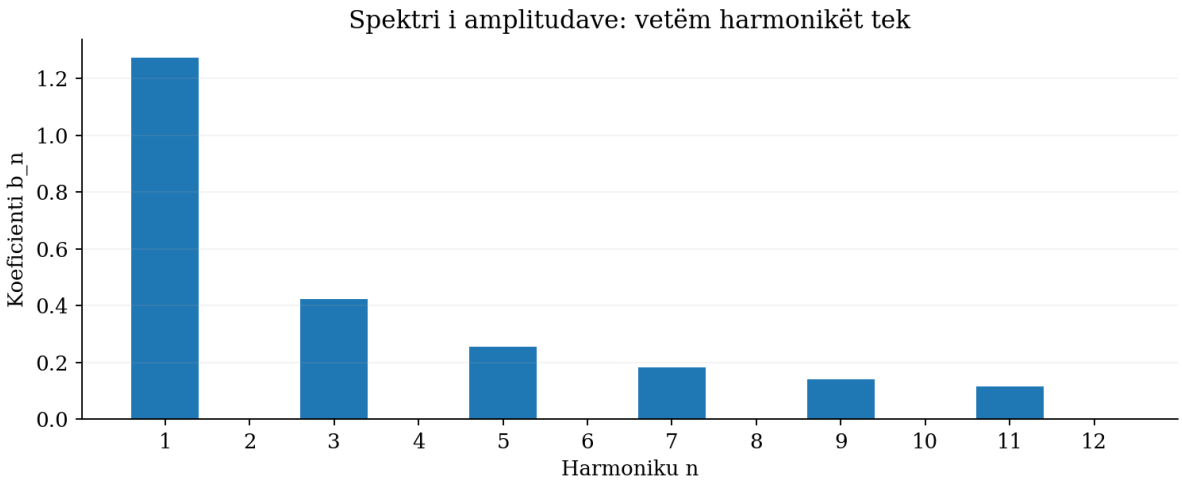


Figura 4: Amplitudat e koeficientëve sinusoidalë për valën katrore.

Për $n \geq 1$ integrimi me pjesë jep

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1).$$

Pra $a_n = 0$ për n çift dhe $a_n = -4/(\pi n^2)$ për n tek; seria e Fourier-it është

$$\boxed{\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}.}$$

Kjo seri trigonometrike është absolutisht dhe uniformisht konvergjente sipas kriterit të Weierstrass-it, sepse $|\cos((2k+1)x)| \leq 1$ dhe $\sum(2k+1)^{-2} < \infty$. Për identifikimin e shumës me $|x|$ përdoret teorema përkatëse e unicitetit/konvergjencës që do të trajtohet sistematikisht në Leksionin 6.

9. Procesi i zgjidhjes: nga problemi te përfundimi

1. **Periudha.** Përcakto nëse intervali është $[-\pi, \pi]$ apo $[-L, L]$ dhe shkruaj normalizimin e duhur.
2. **Simetria.** Provo nëse funksioni është çift, tek ose pa simetri të dobishme.
3. **Koeficientët.** Shkruaj formulat integrale përpara njehsimit; argumentoni çdo integrim me pjesë.
4. **Kontrolli.** Verifiko koeficientin konstant dhe shenjat; një koeficient i gabuar ndryshon gjithë përfaqësimin.
5. **Përafrimi.** Ndërto S_N si shumë të fundme, jo si vlerë e pretenduar e shumës së pafundme.
6. **Konvergjenca.** Identifiko teoremën e nevojshme; mos nxirr barazi pikësore vetëm nga integralet ose nga grafiku.

10. Për periudhën e përgjithshme $2L$

Nëse $f(x + 2L) = f(x)$ dhe f është i integrueshëm në $[-L, L]$, baza bëhet

$$1,\ \cos\frac{n\pi x}{L},\ \sin\frac{n\pi x}{L} \quad (n \geq 1),$$

me koeficientët

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx,$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

Argument. Zëvendësimi $t = \pi x/L$ e transformon integralin në $[-L, L]$ në integralin standard në $[-\pi, \pi]$; kështu rikthehen të njëjtat relacione ortogonaliteti, me faktor normalizues $1/L$.

11. Gabime metodologjike që duhen shmangur

- **Gabimi G1:** ngatërrimi i a_0 me termin konstant $a_0/2$. **Korrigjimi:** koeficienti llogaritet me $1/\pi$, por në seri vendoset $a_0/2$.
- **Gabimi G2:** përdorimi i formulave për 2π për një funksion me periudhë $2L$. **Korrigjimi:** kontrollo shkallëzimin $n\pi/L$ dhe faktorët $1/L$.
- **Gabimi G3:** integrim i panevojshëm i koeficientëve sinus për funksion çift. **Korrigjimi:** zbato paritetin fillimisht.
- **Gabimi G4:** pohimi $f = S_\infty$ në çdo pikë për çdo funksion të integrueshëm. **Korrigjimi:** kërko teoremë konvergjence, me hipoteza të saktësuara.
- **Gabimi G5:** interpretimi i ortogonalitetit si mosprerje e grafikëve. **Korrigjimi:** përdor integralin e produktit.
- **Gabimi G6:** deklarimi i një prove nga 20 ose 100 harmonikë. **Korrigjimi:** eksperimenti numerik është ilustrues, jo vërtetim.

12. Përmbledhje me lidhje konceptuale

Periudha $\to$ sistemi trigonometrik $\to$ ortogonaliteti $\to$ koeficientët $\to$ simetria $\to$ projeksioni optimal $\to$ shumave të pjesshme $\to$ teorema e konvergjencës.

Për studim të pavarur. Studentët duhet të provojnë në mënyrë të plotë pabarazinë e Bessel-it, të llogarisin koeficientët e funksionit $|x|$ dhe të japin një kundërshembull ndaj pohimit “koeficientët ekzistojnë, prandaj seria konvergjon kudo”.

Bibliografi orientuese. Ofendija, *Analiza Matematike II*, kap. XII; Stein–Shakarchi, *Fourier Analysis: An Introduction*, kap. 1; Zygmund, *Trigonometric Series*, vëll. I. Referencat janë për orientim, jo pretendim për riprodhim tekstual.