LEKSIONI 05 ů CIKLI III NË MATEMATIKË ů 2026–2027

Kalimi në limit për vargjet dhe seritë funksionale

Vazhdueshmëria ů Integrimi ů Derivimi

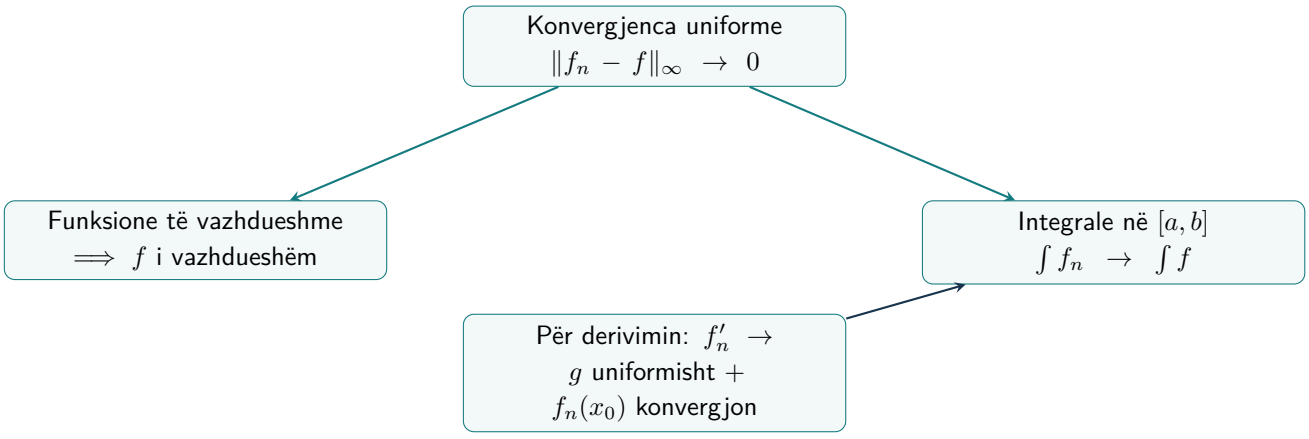
Autore: Prof. As. Dr. Siditë Duraj
Universiteti i Shkodrës "Luigj Gurakuqi" ů Fakulteti i Shkencave të Natyrës

Ideja themelore

Nga $f_n \to f$ pikësisht *nuk* rrjedh automatikisht se f është i vazhdueshëm, se $\int f_n \to \int f$, ose se $f_n' \to f'$. Këto kalime kërkojnë hipoteza të ndryshme. Objektivi i kapitullit është të dallojë, të formulojë dhe të vërtetojë kushtet e mjaftueshme.

Rezultatet e të nxënit. Studenti (i) dallon konvergjencën pikësore nga ajo uniforme; (ii) vërteton teoremën e ruajtjes së vazhdueshmërisë; (iii) argumenton kalimin nën integral; (iv) formulon teoremën e derivimit dhe identifikon domosdoshmërinë e hipotezave; (v) zbaton rezultatet për seritë funksionale me kontroll të mbetjes.

1. Harta logjike e kapitullit



Vërejtje. Për derivimin *nuk* mjafton vetëm konvergjenca uniforme e (f_n). Kriteri i saktë përdor konvergjencën uniforme të derivateve dhe konvergjencën në një pikë bazë.

2. Përkufizimet dhe instrumenti bazë

Le të jetë $E \subseteq \mathbb{R}$ dhe $f_n, f : E \to \mathbb{R}$. Konvergjenca uniforme $f_n \rightrightarrows f$ në E do të thotë:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon \quad \forall x \in E : \qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Kur madhësitë janë të kufizuara, kjo është ekuivalente me $\sup_{x\in E}|f_n(x)-f(x)|\to 0$. Mbi një bashkësi jo të kufizuar sup mund të jetë $+\infty$ për disa n; prandaj forma me kuantifikatorë është përkufizimi i përgjithshëm.

Teorema 5.1 Ruajtja e vazhdueshmërisë

Nëse çdo f_n është i vazhdueshëm në $x_0\in E$ (në topologjinë relative të E) dhe $f_n\to f$ uniformisht në E, atëherë f është i vazhdueshëm në x_0.

Vërtetim. Për $\varepsilon>0$ zgjedhim N të tillë që $|f_N(x)-f(x)|<\varepsilon/3$ për të gjithë $x\in E$. Nga vazhdueshmëria e f_N në x_0 ekziston $\delta>0$ që $x\in E$ dhe $|x-x_0|<\delta$ të japin $|f_N(x)-f_N(x_0)|<\varepsilon/3$. Prandaj

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x_0)|&\le|f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(x_0)|\\&\quad+|f_N(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon.\end{aligned}$$

Pika kyçe është se N zgjidhet *një herë për të gjitha* $x\in E$. □

Kundërshembull 5.1 Pikësorja nuk ruan vazhdueshmërinë

Në $[0,1]$, $f_n(x)=x^n$ është i vazhdueshëm, por kufiri pikësor $f(x)=0$ për $0\le x<1$ dhe $f(1)=1$ nuk është i vazhdueshëm në $x=1$. Për rrjedhojë, konvergjenca nuk mund të jetë uniforme në $[0,1]$.

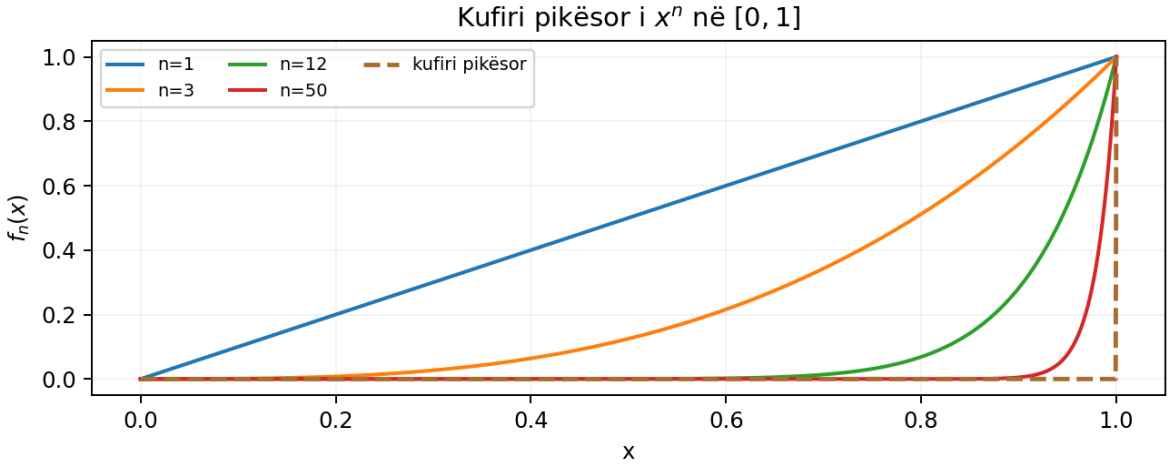


Figura 5.1. Kufiri pikësor dhe ndërprerja e vazhdueshmërisë.

3. Kalimi i limitit nën integral

Teorema 5.2 Integrimi i vargut uniformisht konvergjent

Nëse $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ janë të vazhdueshme dhe $f_n\to f$ uniformisht, atëherë f është i vazhdueshëm, kështu i integrueshëm sipas Rimanit, dhe

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Vërtetim. Nga Teorema 5.1, f është i vazhdueshëm. Për çdo n:

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| \le \int_a^b |f_n - f| \le (b-a)\sup_{[a,b]}|f_n - f| \longrightarrow 0.$$

Kjo vërteton barazimin. □

Kundërshembull 5.2 Pikësorja nuk lejon shkëmbimin e integralit

Për $f_n(x) = n^2x(1-x)^n$, $x \in [0,1]$, kemi $f_n(x) \to 0$ në çdo pikë. Por

$$\int_0^1 n^2x(1-x)^n\,dx = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \longrightarrow 1 \neq 0.$$

Në veçanti, integrali i kufirit pikësor është 0. Kjo tregon se hipoteza e uniformitetit në Teoremën 5.2 nuk mund të fshihet pa një hipotezë zëvendësuese.

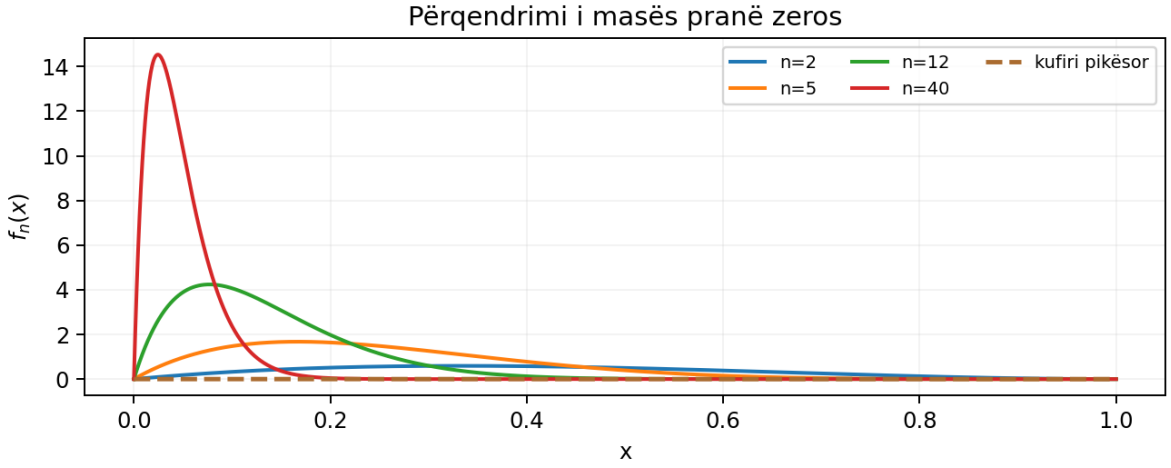


Figura 5.2. Një varg me kufi pikësor zero, por integrale me kufi 1.

4. Teorema e derivimit dhe logjika e provës

Teorema 5.3 Kalimi në limit nën derivat

Le të jetë $[a,b]$ interval i mbyllur dhe $f_n \in C^1([a,b])$. Supozojmë se (i) për një $x_0 \in [a,b]$, vargu $f_n(x_0)$ konvergjon; (ii) $f_n' \to g$ uniformisht në $[a,b]$. Atëherë ekziston $f \in C^1([a,b])$ e tillë që $f_n \to f$ uniformisht dhe $f' = g$ (derivatet në skajet kuptohen njëanëshe).

Vërtetim. Teorema themelore e analizës jep

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f_n'(t)\,dt.$$

Vendosim $c = \lim f_n(x_0)$ dhe $f(x) = c + \int_{x_0}^x g(t)\,dt$. Funksioni g është i vazhdueshëm, sepse është kufiri uniform i funksioneve të vazhdueshme. Për çdo $x \in [a,b]$:

$$|f_n(x) - f(x)| \le |f_n(x_0) - c| + (b-a)\sup_{t\in[a,b]}|f_n'(t) - g(t)| \to 0.$$

Duke derivuar identitetin integral sipas teoremës themelore, marrim $f'(x) = g(x)$. □

Kundërshembull 5.3 Konvergjenca uniforme e funksioneve nuk mjafton

Vargu $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ konvergjon uniformisht drejt $|x|$ në $[-1,1]$, sepse $0 \le f_n(x) - |x| \le \frac{1}{\sqrt{n}}$. Të gjitha f_n janë C^1, ndërsa $|x|$ nuk është i derivueshëm në 0. Prandaj nuk mund të kalohet me derivatim te kufiri vetëm nga uniformiteti i f_n.

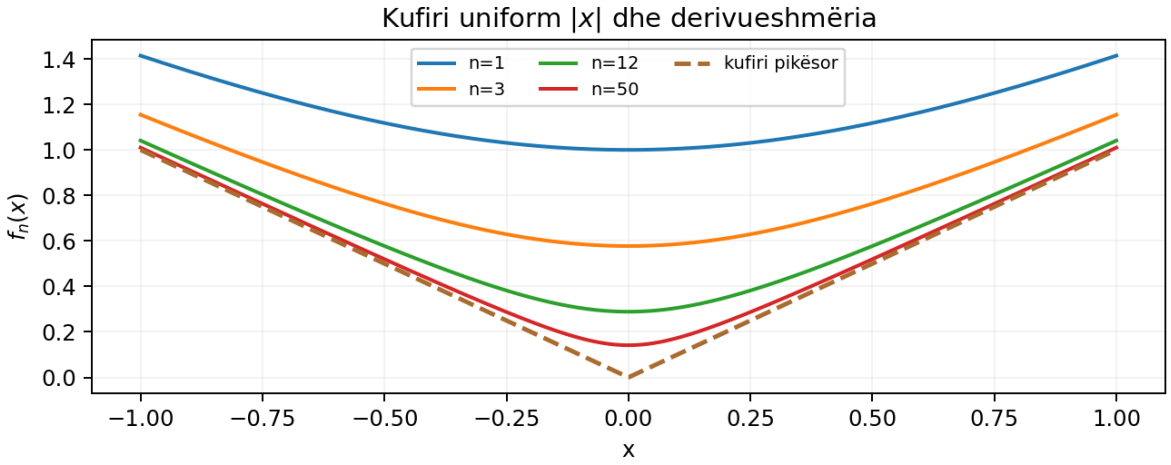


Figura 5.3. Ruajtja e uniformitetit nuk nënkupton ruajtjen e derivueshmërisë.

5. Nga vargjet te seritë funksionale

Për një seri $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ vendosim $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} u_n(x)$. Të gjitha rezultatet e mësipërme zbatohen për (S_N); kjo është ura logjike me Leksionin 4.

Teorema 5.4 Vazhdimësia dhe integrimi i shumës

Nëse $u_n \in C([a,b])$ dhe $\sum u_n$ konvergjon uniformisht në $[a,b]$ drejt S, atëherë S është i vazhdueshëm dhe

$$\int_a^b S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx.$$

Vërtetim. Për çdo N, S_N është i vazhdueshëm. Nga konvergjenca uniforme dhe teoremat 5.1 e 5.2 kemi vazhdueshmërinë e S dhe $\int S = \lim_N \int S_N$. Për linearitetin e integralit të shumës së fundme, $\int S_N = \sum_{n=1}^{N} \int u_n$. $\square$

Teorema 5.5 Derivimi term pas termi i serisë

Le të jetë $u_n \in C^1([a,b])$. Nëse $\sum u_n'(x)$ konvergjon uniformisht në $[a,b]$ dhe $\sum u_n(x_0)$ konvergjon për një $x_0 \in [a,b]$, atëherë $\sum u_n$ konvergjon uniformisht dhe shuma S plotëson

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), \qquad x \in (a,b).$$

Vërtetim. Zbatojmë Teoremën 5.3 për S_N dhe $S_N' = \sum_{n=1}^{N} u_n'$. Hipotezat janë pikërisht konvergjenca e $S_N(x_0)$ dhe konvergjenca uniforme e S_N'. $\square$

6. Shembuj të punuar me argumentim

Shembull 6.1. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ konvergjon uniformisht në $[-1,1]$ nga $\left|\frac{x^n}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$. Si rrjedhim, shuma është e vazhdueshme në $[-1,1]$ dhe mund të integrohet term pas termi:

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)}.$$

Ky fakt nuk jep automatikisht derivimin term pas termi deri në $x = 1$, sepse seria e derivateve $\sum x^{n-1}/n$ divergon në $x = 1$.

Shembull 6.2. Në $[-r,r]$, ku $0 < r < 1$, seria gjeometrike $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ dhe seria e derivateve $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ konvergojnë uniformisht (majorohen nga r^n dhe nr^{n-1}). Prandaj

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1.$$

Për çdo x të brendshëm ekziston një segment $[-r,r]$ që e përmban; kështu rezultati vlen në $(-1,1)$.

7. Gabime të zakonshme dhe kontrolli i argumentimit

1. **Ngatërrimi i dy kufijve.** $\lim_n \int f_n$ nuk është automatikisht $\int \lim_n f_n$.
2. **Përdorimi i uniformitetit të gabuar.** Për derivimin kërkohet kontroll mbi derivatet, jo vetëm mbi funksionet.
3. **Harrimi i pikës bazë.** Konvergjenca uniforme e derivateve nuk përcakton konstantat shtesë: $f_n(x) = n$ kanë $f_n' = 0$, por nuk konvergojnë.
4. **Përgjithësimi nga një grafik.** Një numër i fundmë grafikësh nuk mund të provojë konvergjencën uniforme.
5. **Ngatërrimi i skajeve.** Rezultatet lokale për $(-1,1)$ nuk garantojnë identitete në $x = \pm 1$.

Udhëzues për vendimmarrje

Për vazhdueshmërinë: verifiko vazhdueshmërinë e anëtarëve dhe konvergjencën uniforme. Për integrimin: fikso intervalin kompakt, integrueshmërinë dhe vlerëso gabimin me gjatësinë e intervalit. Për derivimin: verifiko konvergjencën uniforme të derivateve dhe konvergjencën në një pikë. Në seritë funksionale zëvendëso f_n me S_N.

8. Orientim për studim të pavarur

Studioni për secilën teoremë: (1) hipotezat; (2) përfundimin; (3) hapat e vërtetimit; (4) çfarë dështon pa hipotezën kryesore. Fletorja shoqëruese përmban ushtrime të zhvilluara rresht pas rreshti, përfshirë kundërshembuj, mbetje dhe justifikim të kalimeve në limit. **Literaturë e rekomanduar:** W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, kapitulli mbi vargjet dhe seritë e funksioneve; T. M. Apostol, *Mathematical Analysis*, pjesët mbi konvergjencën uniforme. Formulimet në këtë leksion janë paraqitur në kushte të përshtatshme për integralin e Rimanit dhe derivimin klasik.