UNIVERSITETI I SHKODRËS “LUIGJ GURAKUQI”
Fakulteti i Shkencave të Natyrës · Departamenti i Matematikës

Seritë e fuqive dhe intervali i konvergjencës

LEKSIONI 06 · STUDIMET E CIKLIT TË PARË NË MATEMATIKË · 2026–2027

Autore: Prof. As. Dr. Siditë Duraj

Pyetja qendrore. Për cilat vlera të ndryshores një polinom i pafundmë përfaqëson një funksion? Çfarë garanton legjitimitetin e derivimit dhe integrimit të tij term pas termi? Përgjigjja ndërtohet nga teoria e konvergjencës uniforme e leksioneve pararendëse.

Përmbajtja

1 Objektivat dhe njohuritë paraprake 1
2 Përkufizimi dhe analogjia me serinë gjeometrike 2
3 Teorema e rrezes dhe formula Cauchy–Hadamard 3
4 Pikat skajore dhe katër tipe intervalesh 4
5 Konvergjenca uniforme lokale 4
6 Derivimi dhe integrimi term pas termi 4
7 Vetitë e shumës dhe uniciteti i koeficientëve 5
8 Teorema e Abelit për sjelljen në skajin e intervalit 6
9 Kontrolli rigoroz i gabimit 6
10 Shembuj të argumentuar 7
11 Gabime të zakonshme dhe udhëzues vendimmarrjeje 7
12 Detyra për studim të pavarur 8
13 Literatura orientuese 8

1 Objektivat dhe njohuritë paraprake

Studenti duhet (i) të identifikojë qendrën dhe koeficientët; (ii) të provojë teoremën e rrezes; (iii) të llogarisë rrezen me formulën Cauchy–Hadamard dhe raportin kur kushtet e këtij të fundit përmbushen; (iv) të analizojë veçmas secilin skaj; (v) të provojë

konvergjencën uniforme në segmente të brendshme; (vi) të justifikojë operacionet term pas termi dhe (vii) të vlerësojë gabimin e përafrimit.

Parakushte: seritë numerike dhe kriteret e tyre; konvergjenca uniforme e vargjeve/serive funksionale; kriteri M i Vajershtrasit; integrimi dhe derivimi i funksioneve reale.

2 Përkufizimi dhe analogjia me serinë gjeometrike

Përkufizim 2.1. Një *seri e fuqive me qendër* $c \in \mathbb{R}$ është

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots,$$

ku (a_n) është varg koeficientësh realë. Për një x të fiksuar merret një seri numerike; bashkësia e konvergjencës përbëhet nga të gjitha pikat ku kjo seri konvergjon.

Shembulli themelor është

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \qquad |x| < 1.$$

Për $|x| < 1$, nga identiteti për shumën e pjesshme

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{1 - x^{N+1}}{1-x}$$

merret kufiri. Për $|x| \geq 1$ termi i përgjithshëm nuk priret në zero, prandaj seria divergon. Shuma e pjesshme nuk duhet ngatërruar me shumën e pafundme.

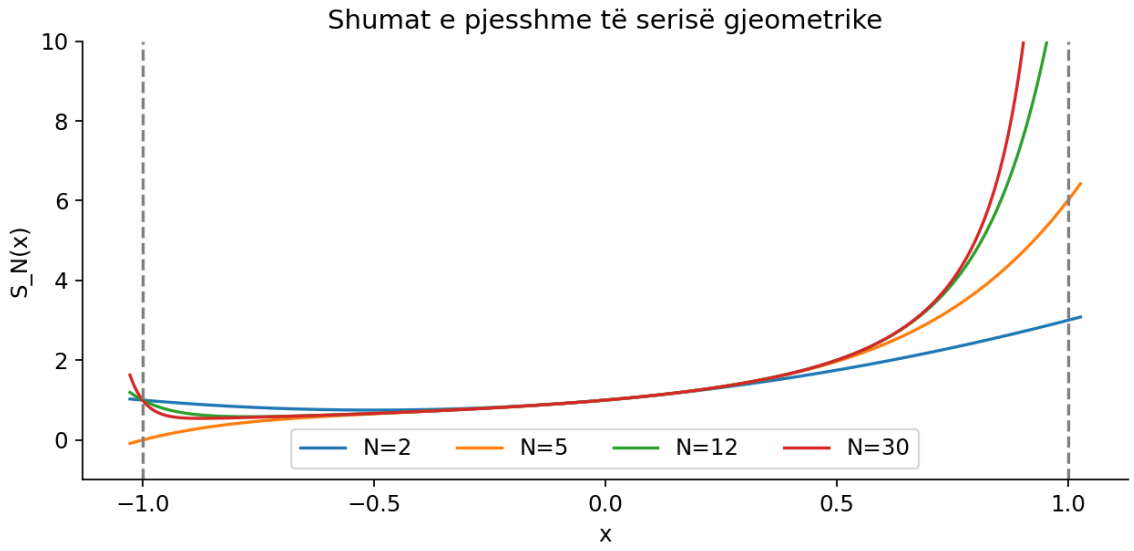


Figura 1: Ndryshimi i shumave të pjesshme të serisë gjeometrike kur numri i termave rritet. Grafiku i fundmë nuk është vërtetim i konvergjencës.

3 Teorema e rrezes dhe formula Cauchy–Hadamard

Teoremë 3.1 (Cauchy–Hadamard)**.** *Vendosim*

$$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0,+\infty], \qquad R = \frac{1}{L},$$

me konventat $1/0 = +\infty$, $1/(+\infty) = 0$. *Atëherë seria* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ *konvergjon* absolutisht *kur* $|x-c| < R$ *dhe divergon kur* $|x-c| > R$. *Për* $|x-c| = R$, *teorema nuk vendos rezultatin.*

Vërtetim. Le të jetë $t = |x-c|$. Kriteri i rrënjës, për termat absolutë, jep

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-c)^n|} = tL \qquad (t>0),$$

ku produkti merret në kuptimin e zakonshëm për $t>0$, edhe kur $L=+\infty$. Nëse $tL<1$, kriteri i rrënjës jep konvergjencë absolute; nëse $tL>1$, ekzistojnë pafund indekse ku rrënja e termit është më e madhe se një numër $q>1$, kështu termi nuk mund të priret në zero. Në $x=c$ vetëm kufiza me $n=0$ mbetet dhe seria konvergjon. Rastet $L=0$ dhe $L=+\infty$ përfshihen në të njëjtin argument: përkatësisht $R=+\infty$ ose $R=0$. □

Vërejtje 3.2. Rrezja R mund të jetë 0, e fundme pozitive, ose $+\infty$. Nuk duhet shkruar $R=1/L$ pa trajtuar rastet ekstreme dhe pa identifikuar qendrën c.

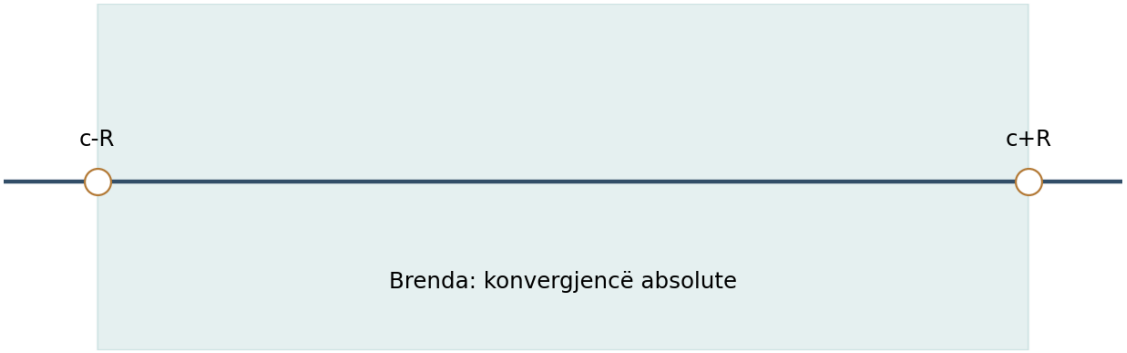


Figura 2: Zona e konvergjencës absolute është e hapur; përfshirja e skajeve përcaktohet veçmas.

Propozim 3.3 (Formula e raportit)**.** *Nëse* $a_n \neq 0$ *për çdo* n *mjaft të madh dhe ekziston*

$$q = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \in [0,+\infty],$$

atëherë $R = 1/q$, *me të njëjtat konventa.*

Vërtetim. Për $t>0$, raporti i termave absolutë të serisë është

$$\frac{|a_{n+1}|t^{n+1}}{|a_n|t^n} = t\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \longrightarrow tq.$$

Kriteri i raportit jep konvergjencë absolute kur $tq<1$ dhe divergjencë kur $tq>1$. Ky klasifikim përcakton të njëjtën rreze si teorema e mëparshme. Për $q=0$ dhe $q=+\infty$ përdoren konventat përkatëse. □

Kujdes: raporti mund të mos ekzistojë ose mund të mos përcaktohet për koeficientë që bëhen zero. Në këto raste formula me lim sup është mjeti i përgjithshëm.

4 Pikat skajore dhe katër tipe intervalesh

Kur $0 < R < +\infty$, në bashkësinë $|x - c| < R$ konvergjenca është absolute. Në $x = c - R$ dhe $x = c + R$ duhen shqyrtuar *dy seri numerike të ndryshme*. Për seri reale të fuqive janë të mundshme katër intervale:

$$(c - R, c + R), \quad [c - R, c + R), \quad (c - R, c + R], \quad [c - R, c + R].$$

Këto forma realizohen, për qendrën zero dhe rrezen një, përkatësisht nga seritë

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

Vërtetimi për secilën kërkon kontrollin e dy skajeve me kriterin e termit zero, Leibnizit ose serinë p. Për shembull, seria $\sum x^n/n$ konvergjon në $x = -1$ nga Leibnizi, por divergon në $x = 1$ si seria harmonike.

5 Konvergjenca uniforme lokale

Teoremë 5.1 (Uniformiteti në çdo segment të brendshëm)**.** *Nëse seria ka rreze $R > 0$, atëherë për çdo r me $0 < r < R$ ajo konvergjon absolutisht dhe uniformisht në $[c-r, c+r]$. Për rrjedhojë shuma është e vazhdueshme në $(c - R, c + R)$.*

Vërtetim. Zgjedhim s të tillë që $r < s < R$. Nga teorema e rrezes konvergjon seria numerike $\sum |a_n| s^n$. Për $|x - c| \le r$:

$$|a_n (x - c)^n| \le |a_n| r^n \le |a_n| s^n.$$

Kriteri M i Vajershtrasit jep konvergjencë uniforme në segment. Çdo shumë e pjesshme është polinom, pra funksion i vazhdueshëm; kufiri uniform është i vazhdueshëm në segment. Duke zgjedhur segmente rreth secilës pikë të brendshme, shuma është e vazhdueshme në të gjithë intervalin e hapur. □

Dallimi vendimtar. Uniformiteti në *çdo segment kompakt brenda intervalit* nuk nënkupton uniformitet në intervalin e plotë të hapur. Seria $\sum x^n$ në $(-1, 1)$ është shembull: gabimi i shumës së pjesshme nuk ka supremum të fundmë pranë $x = 1$.

6 Derivimi dhe integrimi term pas termi

Teoremë 6.1 (Derivimi i serisë së fuqive)**.** *Nëse $R > 0$ dhe*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n, \qquad |x - c| < R,$$

atëherë f është e derivueshme në këtë interval dhe

$$\boxed{f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - c)^{n-1}.}$$

Seria e derivuar ka të njëjtën rreze R; derivimi mund të përsëritet sa herë të dëshirohet brenda intervalit.

Vërtetim. Nga formula Cauchy–Hadamard dhe $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$ kemi

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}.$$

Prandaj seria e derivuar ka të njëjtën rreze (zhvendosja e indeksit nuk e ndryshon atë). Në çdo segment $[c-r, c+r]$, $r < R$, ajo konvergjon uniformisht, si në teoremën 5.1. Meqë polinomet S_N plotësojnë $S_N(c) = a_0$ dhe S'_N konvergon uniformisht drejt g, teorema e kalimit në limit për derivatet (Leksioni 5) jep $f' = g$. □

Teoremë 6.2 (Integrimi term pas termi)**.** *Për $|x-c| < R$ vlen*

$$\boxed{\int_c^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1}.}$$

Seria e integruar ka po atë rreze R.

Vërtetim. Në segmentin që lidh c me x, seria konvergjon uniformisht; teorema e kalimit të limitit nën integral jep

$$\int_c^x \lim_{N\to\infty} S_N(t)\,dt = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n \int_c^x (t-c)^n\,dt.$$

Integrali i secilit term është $a_n(x-c)^{n+1}/(n+1)$. Për koeficientët $a_n/(n+1)$, faktori $(n+1)^{1/n} \to 1$, prandaj rrezja mbetet R. □

7 Vetitë e shumës dhe uniciteti i koeficientëve

Teoremë 7.1 (Uniciteti i koeficientëve)**.** *Nëse funksioni f përfaqësohet në një interval të hapur rreth c nga seria e fuqive $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ me rreze pozitive, atëherë*

$$\boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.}$$

Prandaj një funksion nuk mund të ketë dy zhvillime të ndryshme në seri fuqish rreth së njëjtës qendër brenda një intervali të përbashkët.

Vërtetim. Teorema e derivimit term pas termi zbatohet vazhdimisht brenda intervalit të konvergjencës. Pas n derivimeve fitohet

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k (x-c)^{k-n}.$$

Në $x = c$, të gjithë termat me $k > n$ zhduken dhe mbetet $f^{(n)}(c) = n! a_n$. Nëse dy seri përfaqësojnë të njëjtin funksion, kjo formulë i përcakton në mënyrë unike të gjithë koeficientët. □

Vërejtje 7.2. Fakti që f ka derivate të të gjitha rendeve nuk garanton që seria e Taylor-it konvergjon drejt vetë f. Përfaqësimi me seri fuqish është një veti më e fortë: *analiticiteti*.

8 Teorema e Abelit për sjelljen në skajin e intervalit

Teoremë 8.1 (Abel, formë reale në skajin e djathtë)**.** *Le të ketë $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ rreze konvergjence $R > 0$ të fundme. Nëse seria numerike $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ konvergjon me shumë S, atëherë*

$$\lim_{x \uparrow R} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S.$$

Teorema analoge vlen në skajin e majtë pas zëvendësimit të ndryshores x me $-x$ dhe zhvendosjes së qendrës.

Vërtetim. Shënojmë $b_n = a_n R^n$ dhe $t = x/R \in [0,1]$. Nga konvergjenca e serisë $\sum b_n$, kriteri i Koshit jep: për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston N i tillë që

$$\left| \sum_{k=n}^{m} b_k \right| < \varepsilon, \qquad m \geq n \geq N.$$

Për çdo $t \in [0,1]$, duke përdorur mbledhjen sipas pjesëve (Abel), për $m \geq n \geq N$ shkruajmë me $B_j = \sum_{k=n}^{j} b_k$:

$$\sum_{k=n}^{m} b_k t^k = B_m t^m + \sum_{k=n}^{m-1} B_k (t^k - t^{k+1}).$$

Meqë $|B_j| < \varepsilon$ dhe $t^k - t^{k+1} \geq 0$, kemi

$$\left| \sum_{k=n}^{m} b_k t^k \right| \leq \varepsilon t^m + \varepsilon (t^n - t^m) = \varepsilon t^n \leq \varepsilon.$$

Pra seria $\sum b_n t^n$ konvergjon uniformisht në $[0,1]$. Shumat e pjesshme janë të vazhdueshme; teorema e vazhdueshmërisë së kufirit uniform jep vazhdimësinë e shumës në $t = 1$. Si rrjedhojë kufiri kur $t \uparrow 1$ është $\sum b_n = S$. □

Përdorimi i saktë: konvergjenca e serisë në një skaj lejon kalimin në atë skaj nga brendësia, por teorema nuk provon vetë konvergjencën në skaj. Kjo duhet vërtetuar më parë në mënyrë të pavarur.

9 Kontrolli rigoroz i gabimit

Le të jetë $0 < r < s < R$ dhe $|x - c| \leq r$. Shënojmë $A_s = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| s^n < \infty$. Për $n \geq N + 1$:

$$|a_n| r^n = |a_n| s^n \left(\frac{r}{s}\right)^n \leq |a_n| s^n \left(\frac{r}{s}\right)^{N+1}.$$

Prandaj për gabimin $E_N(x) = f(x) - S_N(x)$ kemi

$$\boxed{\sup_{|x-c| \leq r} |E_N(x)| \leq A_s \left(\frac{r}{s}\right)^{N+1}.}$$

Ky vlerësim është i sigurt, megjithëse mund të mos jetë optimal. Për serinë gjeometrike në $|x| \leq r < 1$ kemi formulën më të mprehtë

$$\left| \frac{1}{1-x} - \sum_{n=0}^{N} x^n \right| = \left| \frac{x^{N+1}}{1-x} \right| \leq \frac{r^{N+1}}{1-r}.$$

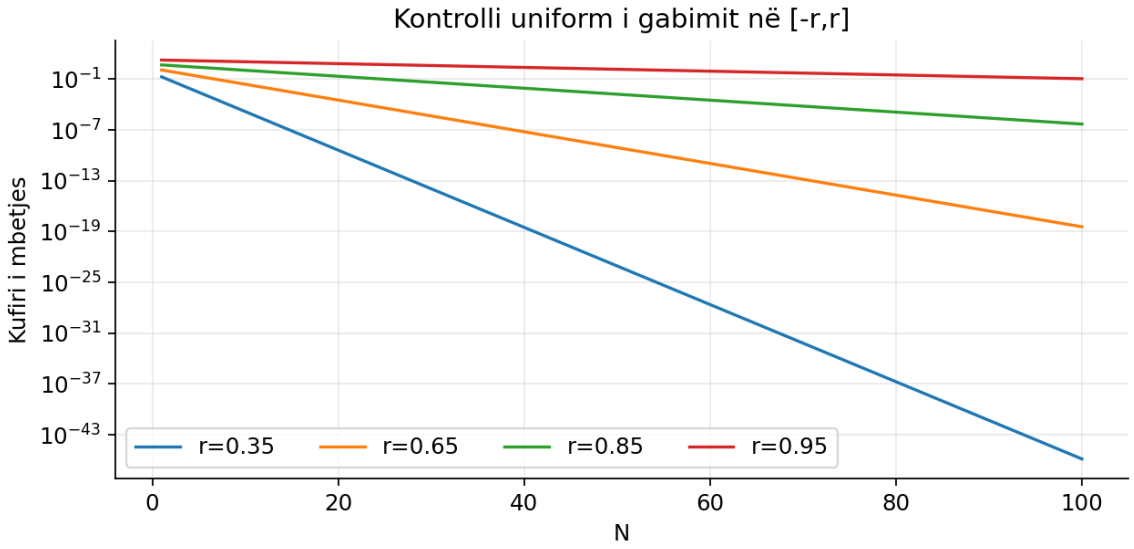


Figura 3: Rënia e vlerësimit rigoroz $r^{N+1}/(1-r)$: pranë skajit nevojiten shumë më tepër terma për të njëjtën saktësi.

10 Shembuj të argumentuar

Shembull 10.1 (Një skaj përfshihet, tjetri jo)**.** Studioni $\sum_{n=1}^{\infty}(x-2)^n/n$. Raporti i koeficientëve ka limit një, prandaj $R=1$, dhe brenda $1<x<3$ kemi konvergjencë absolute. Në $x=1$ merret $\sum(-1)^n/n$, konvergjente sipas Leibnizit, jo absolutisht. Në $x=3$ merret $\sum 1/n$, divergjente. Bashkësia e konvergjencës është $[1,3)$.

Shembull 10.2 (Dy skaje të përfshira)**.** Për $\sum_{n=1}^{\infty}(x+1)^n/n^2$ kemi $R=1$; në $x=-2$, $\sum(-1)^n/n^2$ dhe në $x=0$, $\sum 1/n^2$ konvergjojnë absolutisht. Bashkësia është $[-2,0]$.

Shembull 10.3 (Rrezja zero dhe rrezja e pafundme)**.** Për $\sum n!x^n$ kemi $|a_{n+1}/a_n| = n+1\to+\infty$ dhe $R=0$: vetëm $x=0$ është pikë konvergjence. Për $\sum x^n/n!$ raporti është $1/(n+1)\to 0$ dhe $R=+\infty$: konvergjencë absolute për çdo $x\in\mathbb{R}$.

Shembull 10.4 (Nga seria gjeometrike te logaritmi)**.** Nga $\frac{1}{1+t}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n$ për $|t|<1$, duke integruar nga 0 në x, fitojmë

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n, \qquad |x|<1.$$

Në $x=1$ seria konvergjon te $\ln 2$ (nga Leibnizi dhe vazhdimësia e shumës në atë skaj, që mund të justifikohet me teoremën e Abelit); në $x=-1$ merret $-\sum 1/n$ dhe divergon.

11 Gabime të zakonshme dhe udhëzues vendimmarrjeje

1. Të shpallet intervali $[c-R,c+R]$ pa shqyrtuar dy skajet: përfshirja e tyre nuk rrjedh nga formula e rrezes.
2. Të përdoret formula e raportit kur limiti nuk ekziston ose koeficientët kanë pafund zero: të përdoret lim sup i rrënjës.
3. Të ngatërrohet x^n me x^{2n}: forma $\sum(x^2/4)^n$ ka kusht $|x|<2$, jo $|x|<4$.

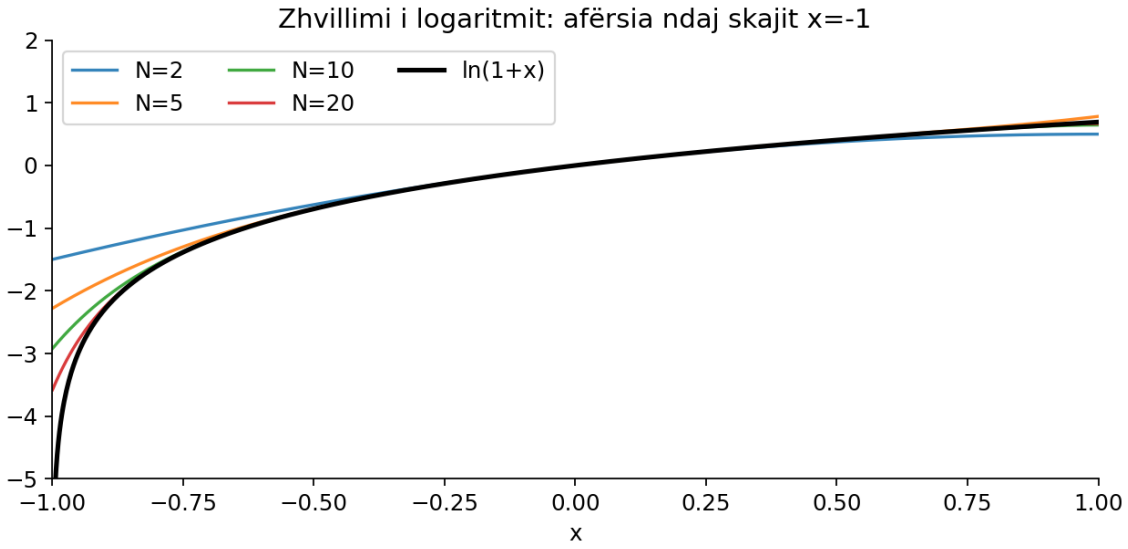


Figura 4: Polinomet e pjesshme të zhvillimit të logaritmit; dukuria pranë $x = -1$ tregon rëndësinë e analizës së skajit.

4. Të derivohet në një pikë skajore vetëm sepse seria fillestare konvergjon atje: teorema e derivimit zbatohet në brendësi.

5. Të merret grafiku i shumave të pjesshme si provë e konvergjencës uniforme: nevojitet vlerësim analitik i supremumit të mbetjes.

Strategjia: (1) identifiko c dhe a_n; (2) njehso R; (3) shqyrto zonën e brendshme; (4) zëvendëso veçmas $x = c \pm R$; (5) klasifiko konvergjencën absolute/kushtore; (6) për derivim, integral ose përafrim shpreh hipotezat dhe kontrollin e gabimit.

12 Detyra për studim të pavarur

1. Përcaktoni bashkësinë e konvergjencës së $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n(x-3)^n}{2^n}$.

2. Studioni $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{n^p}$, $p > 0$, duke klasifikuar skajet sipas p.

3. Provoni se $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ ka rreze një si seri në x; tregoni pse formulat e pakujdesshme për a_n mund të japin përgjigje të gabuara.

4. Duke nisur nga seria gjeometrike, nxirrni serinë e fuqive për $1/(1-x)^2$ dhe jepni domenin e vlefshmërisë.

5. Gjeni një N që garanton gabim më të vogël se 10^{-5} në $|x| \le 1/2$ për $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

13 Literatura orientuese

M. Ofendija, *Analiza Matematike II*, ShBLU, Tiranë, 2005, kap. X (sipas syllabus-it). W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, ed. 3, kapitujt mbi vargjet dhe seritë e funksioneve. T. M. Apostol, *Mathematical Analysis*, ed. 2, seksionet mbi seritë e

fuqive. Këto janë referenca orientuese; formulimet dhe provat e këtij kapitulli janë përgatitur si material didaktik më vete.