LEKSIONI 06 — SERITË E FOURIER-IT DHE ZBATIMET

Konvergjenca pikësore, bërthamat e Dirichlet-it dhe Fejér-it, dukuria e Gibbs-it

Prof. As. Dr. Siditë Duraj

Universiteti i Shkodrës “Luigj Gurakuqi” · CIKLI në Matematikë · 2026–2027

1. Qëllimi, parakushtet dhe kompetencat

Ky leksion vijon trajtimin e ortogonalitetit dhe koeficientëve të Fourier-it nga Leksioni 5. **Pyetja qendrore është kur dhe në çfarë kuptimi një seri e Fourier-it konvergjon drejt funksionit fillestar.** Dallojmë me kujdes konvergjencën pikësore, uniforme dhe konvergjencën në mesatare katrore. Formulat për koeficientët nuk mjaftojnë për të përfunduar konvergjencën.

Në fund studenti duhet: të formulojë e të justifikojë kriterin e Dirichlet-it për funksione pjesë-pjesë të lëmuara; të dallojë vlerën e funksionit nga mesatarja e kufijve anësorë në kërcime; të përdorë bërthamat e Dirichlet-it dhe Fejér-it; të analizojë dukurinë e Gibbs-it; të zbatojë identitetin e Parsevalit nën hipoteza të përshtatshme; të arsyetojë lidhjen ndërmjet përafrimit numerik dhe vërtetimit.

Parakushtet: integrale, veti të funksioneve periodike, koeficientët Fourier, integrim me pjesë, konvergjencë e vargjeve dhe serive, vazhdueshmëri uniforme në segmente.

2. Seria e Fourier-it dhe shumat e pjesshme

Për një funksion real, 2π-periodik, të integrueshëm në $[-\pi,\pi]$, vendosim

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt, \qquad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt \quad (n\ge 1).$$

Përkufizim 6.1. Seria formale e Fourier-it e f është

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\bigl(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\bigr).$$

Shuma e pjesshme e rendit N është

$$S_Nf(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}\bigl(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\bigr).$$

Shkrimi $f(x)\sim\sum$ shpreh lidhjen e koeficientëve; barazimi $f(x)=\lim_N S_Nf(x)$ kërkon një teoremë konvergjence.

3. Bërthama e Dirichlet-it dhe formula integrale

Teorema 6.1. Për çdo $N \geq 0$, shuma e pjesshme paraqitet si

$$S_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_N(t)\, dt,$$

ku

$$D_N(t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{N} \cos(nt) = \frac{\sin((N+\tfrac{1}{2})t)}{\sin(t/2)} \quad (t \notin 2\pi\mathbb{Z}),$$

ndërsa $D_N(0) = 2N+1$, sipas vazhdimësisë.

Vërtetim. Shkruajmë $a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos(n(x-u))\, du$. Duke qenë se shuma është e fundme, lejohet ndërrimi me integralin. Pas ndryshimit periodik të ndryshores $t = x - u$ fitojmë konvolucionin me D_N. Për identitetin e fundit, përdorim $2\sin(t/2)\cos(nt) = \sin((n+\frac{1}{2})t) - \sin((n-\frac{1}{2})t)$; mbledhja teleskopike jep formulën. $\square$

Nga ortogonaliteti, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\, dt = 1$. Kjo **nuk** e bën D_N një bërthamë jonegative: ajo luhatet dhe normat e saj L^1 nuk janë të kufizuara në mënyrë uniforme.

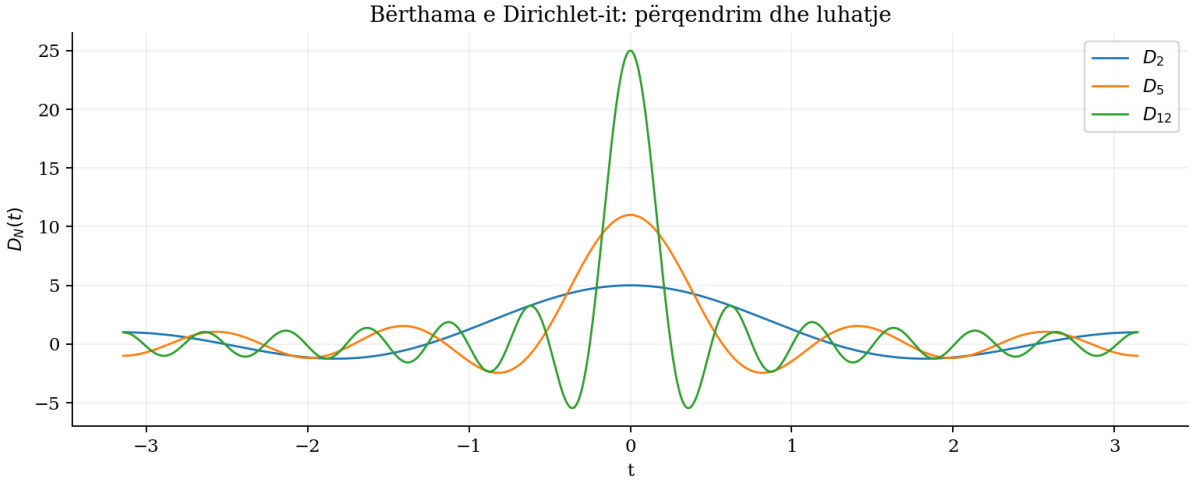


Figura 1: Bërthama e Dirichlet-it.

4. Konvergjenca pikësore dhe vlera në kërcime

Përkufizim 6.2. Një funksion është *pjesë-pjesë* C^1 në një periudhë nëse ekziston një ndarje e fundme në nënintervale ku funksioni dhe derivati kanë zgjatime të vazhdueshme njëanësore në skaje. Ky kusht siguron ekzistencën e kufijve anësorë në çdo pikë.

Teorema 6.2 (Dirichlet). Nëse f është 2π-periodik dhe pjesë-pjesë C^1, atëherë për çdo x:

$$\boxed{\lim_{N\to\infty} S_N f(x) = \frac{f(x-) + f(x+)}{2}.}$$

Në pikat e vazhdimësisë, kufiri është $f(x)$. Në një kërcim me kufij të ndryshëm, seria konvergjon drejt **mesatares së kufijve anësorë**, pavarësisht vlerës së caktuar të $f(x)$ në atë pikë.

Ide e plotësuar e vërtetimit. Falë $\int D_N = 2\pi$, vendosim $m = (f(x-) + f(x+))/2$. Përmes simetrisë së bërthamës:

$$S_N f(x) - m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t) - 2m]\, D_N(t)\, dt.$$

Përkufizojmë $g_x(t) = [f(x+t)+f(x-t)-2m]/[2\sin(t/2)]$, për $t \in (0, \pi]$. Nga kushti pjesë-pjesë C^1, funksioni g_x është pjesë-pjesë i kufizuar dhe i integrueshëm: pranë 0, numeratori është $O(t)$ dhe $\sin(t/2) \asymp t$. Prandaj

$$S_N f(x) - m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} g_x(t) \sin((N + \tfrac{1}{2})t)\, dt \longrightarrow 0.$$

Kalimi i fundit rrjedh nga lema e Riemann–Lebesgue: për një funksion të integrueshëm g, integrali i $g(t)\sin(\lambda t)$ shkon në zero kur $\lambda \to \infty$. Për funksione pjesë-pjesë C^1, kjo vërtetohet drejtpërdrejt duke integruar me pjesë në çdo nëninterval; për funksione të përgjithshme L^1 përdoret përafrimi nga funksionet hap. □

Kujdes për kufijtë $-\pi, \pi$. Ata identifikohen nga zgjatimi periodik. Për $f(x) = x$ në $(-\pi, \pi)$, në $x = \pi$ kufijtë anësorë janë π dhe $-\pi$, prandaj seria konvergjon drejt zeros, jo drejt π.

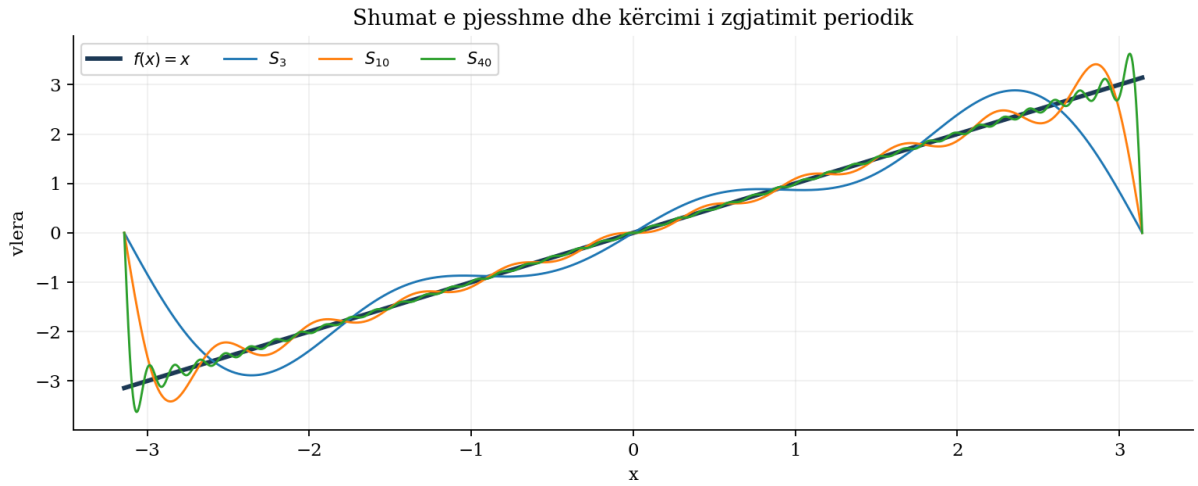


Figura 2: Funksioni sharrë dhe shumat e pjesshme të Fourier-it.

5. Shembull i zgjidhur: funksioni sharrë

Le të jetë $f(x) = x$ për $-\pi < x < \pi$, me zgjatim 2π-periodik. Funksioni është tek, ndaj $a_0 = a_n = 0$. Integrimi me pjesë jep

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx)\, dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

Pra, për $-\pi < x < \pi$:

$$\boxed{x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx).}$$

Në $x = \pm\pi$ shuma është 0. Vlera $f(\pi)$ mund të përcaktohet veçmas; as koeficientët dhe as shuma nuk ndryshojnë nëse ndryshojmë f në një numër të fundmë pikash.

Pasojë. Për $x = \pi/2$ dhe duke përdorur sinusët përkatës, merret identiteti i serisë së Leibnizit $\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - \cdots$.

6. Konvergjenca uniforme: çfarë lejohet të përfundojmë?

Një varg funksionesh të vazhdueshme që konvergjon uniformisht në një segment ka limit të vazhdueshëm atje. Prandaj shumat $S_N f$, të vazhdueshme, **nuk mund** të konvergjojnë uniformisht në gjithë periudhën drejt një funksioni me kërcim.

Për funksione pjesë-pjesë C^1, konvergjenca është uniforme në çdo segment kompakt që nuk përmban kërcime, por në pikën e kërcimit lind fenomeni i Gibbs-it. Ky pohim nuk do të thotë se konvergjenca është uniforme në të gjithë bashkësinë e pikave të vazhdimësisë pa kufizim shtesë.

Dallim. Konvergjenca pikësore $S_N f(x) \to f(x)$ për çdo x nuk jep vetvetiu konvergjencën uniforme, as lejimin e ndërrimit të limitit me derivimin.

7. Dukuria e Gibbs-it

Për valën katrore $f(x) = -1$ për $-\pi < x < 0$ dhe $f(x) = 1$ për $0 < x < \pi$, e zgjatur periodikisht, kemi

$$S_N f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{1 \le n \le N \\ n \text{ tek}}} \frac{\sin(nx)}{n}.$$

Pranë një kërcimi, shumat e pjesshme shfaqin një mbikalim që nuk zhduket në lartësi kur N rritet; zona e luhatjeve ngushtohet. Për kërcim me lartësi J, mbikalimi asimptotik mbi vlerën anësore është rreth $0.08949\,J$ (afërsisht 8.95% e kërcimit). Në vetë pikën e kërcimit, limiti është mesatarja e kufijve, në këtë rast zero.

Interpretim metodologjik. Rritja e numrit të harmonikëve nuk garanton eliminimin e mbikalimit maksimal. Një grafik me N të fundmë e ilustron, por prova e kufirit asimptotik kërkon analizë shtesë.

8. Mesataret e Fejér-it: mënyra e përmirësuar e përafrimit

Përkufizim 6.3. Mesatarja e Cesàro-s e shumave të pjesshme është

$$\sigma_N f(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} S_k f(x).$$

Ajo paraqitet me bërthamën e Fejér-it:

$$\sigma_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) F_N(t)\, dt,$$

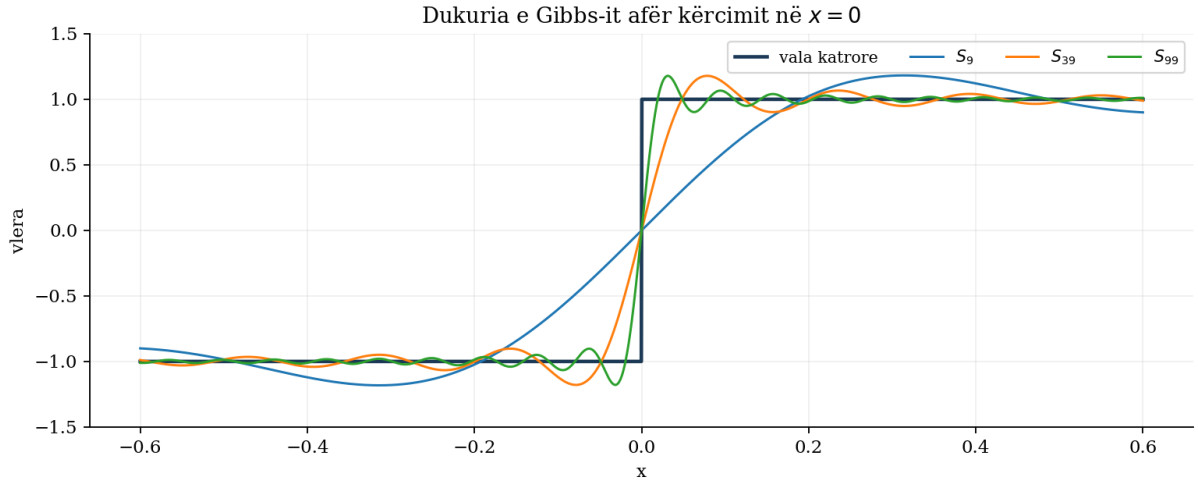


Figura 3: Dukuria e Gibbs-it pranë një kërcimi.

$$F_N(t) = \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin((N+1)t/2)}{\sin(t/2)}\right)^2 \geq 0,$$

me $F_N(0) = N+1$, dhe $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(t)\,dt = 1$.

Teorema 6.3 (Fejér). Nëse f është i vazhdueshëm dhe 2π-periodik, atëherë $\sigma_N f \to f$ **uniformisht** në $\mathbb{R}$.

Vërtetim. Nga vazhdueshmëria uniforme e f, për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston $\delta > 0$ që $|f(x-t)-f(x)| < \varepsilon$ për $|t| < \delta$, uniformisht në x. Ndajmë integralin e diferencës $\sigma_N f(x) - f(x)$ në $|t| < \delta$ dhe $\delta \leq |t| \leq \pi$. Pjesa e parë ka madhësi jo më shumë se ε, sepse $F_N \geq 0$ dhe integrali i normalizuar është një. Për pjesën e dytë, $F_N(t) \leq [(N+1)\sin^2(\delta/2)]^{-1}$ dhe $|f(x-t)-f(x)| \leq 2\|f\|_\infty$, prandaj ajo shkon në zero uniformisht në x. Si ε është arbitrar, provohet pohimi. $\square$

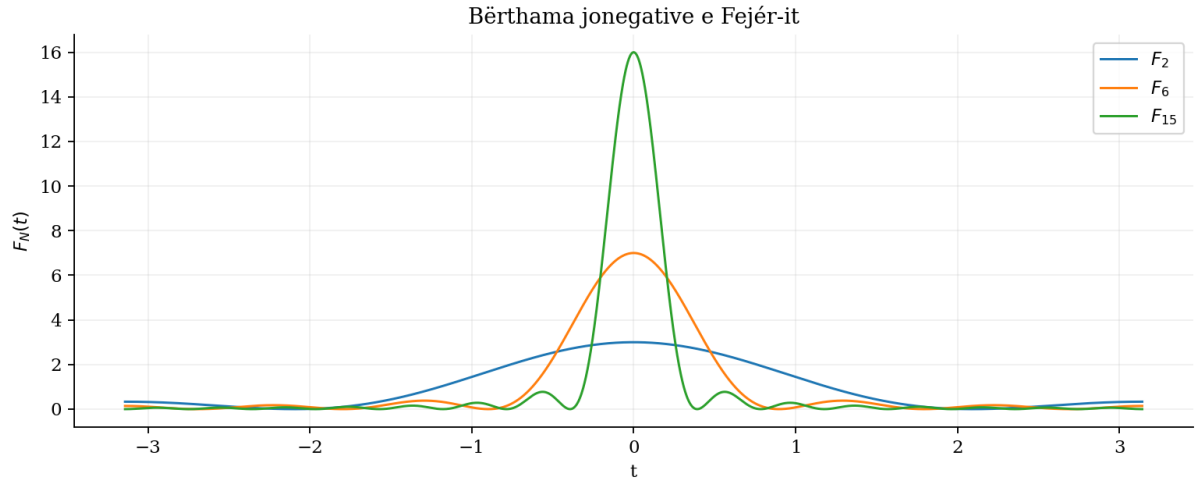


Figura 4: Bërthamat jonegative të Fejér-it.

Te funksionet me kërcime, mesatarja e Fejér-it konvergjon në pikë drejt mesatares së kufijve anësorë, nën kushtet e përshtatshme të ekzistencës së tyre. Nuk duhet pretenduar konvergjencë

uniforme drejt një funksioni jo të vazhdueshëm.

9. Energjia, Bessel dhe Parseval

Teorema 6.4 (pabarazia e Bessel-it). Për $f \in L^2[-\pi,\pi]$ me koeficientë të Fourier-it:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx.$$

Argumentim. Nga ortogonaliteti i $f - S_N f$ me të gjithë përbërësit trigonometrikë të rendit jo më të madh se N:

$$\|f - S_N f\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2)\right) \ge 0.$$

Kalojmë në limit në shumën jonegative. □

Teorema 6.5 (Parseval). Për çdo $f \in L^2[-\pi,\pi]$:

$$\boxed{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2).}$$

Ky barazim përdor **plotësinë** e sistemit trigonometrik në L^2, jo vetëm ortogonalitetin. Një justifikim: teorema e Fejér-it jep përafrim uniform të funksioneve periodike të vazhdueshme me polinome trigonometrike; nga dendësia e funksioneve të vazhdueshme në L^2 rezulton dendësia e polinomeve trigonometrike. Pra projeksionet $S_N f$ konvergjojnë në normë L^2 dhe identiteti i Pitagorës jep Parsevalin.

Shembull. Për $f(x) = x$ në $(-\pi,\pi)$, $b_n = 2(-1)^{n+1}/n$ dhe $a_n = 0$. Nga Parseval:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}, \qquad \frac{2\pi^2}{3} = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Prandaj $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \pi^2/6$.

10. Gabimet tipike që duhen shmangur

1. **Barazimi pa hipoteza:** nga njohja e koeficientëve të shkruhet automatikisht $f = S_\infty f$. Duhet përcaktuar kuptimi i konvergjencës.
2. **Vlera në kërcim:** të vendoset $S_\infty f(x_0) = f(x_0)$ pa kontrolluar kufijtë anësorë.
3. **Ngatërrimi i konvergjencave:** barazimi në L^2 nuk siguron konvergjencë pikësore në çdo pikë për një funksion arbitrar në L^2.
4. **Grafiku si provë:** rezultatet numerike për një N të fundmë nuk provojnë sjelljen kur $N \to \infty$.
5. **Gibbs-i:** të pretendohet se mbikalimi maksimal zhduket duke rritur harmonikët.
6. **Parseval pa plotësi:** ortogonaliteti i vetëm jep Bessel-in; barazimi i Parsevalit kërkon plotësinë.

11. Hartë e lidhjeve teorike dhe pyetje seminari

$$\text{Koeficientët e Fourier-it} \longrightarrow \text{Shumat } S_N \longrightarrow \begin{cases} \text{Dirichlet: konvergjencë pikësore,} \\ \text{Fejér: mesatarizim dhe konvergjencë uniforme,} \\ \text{Parseval: konvergjencë në } L^2. \end{cases}$$

Pyetje për analizë: (i) Pse nuk kemi konvergjencë uniforme drejt valës katrore? (ii) Çfarë përfundimi jep Dirichlet-i në kërcim? (iii) Përse Fejér-i lejon një teoremë uniforme për funksione të vazhdueshme? (iv) Në cilin hap përdoret plotësia e sistemit trigonometrik te Parsevali?

Literaturë orientuese: M. Ofendija, *Analiza Matematike II*, kapitulli për seritë trigonometrike; E. M. Stein dhe R. Shakarchi, *Fourier Analysis: An Introduction*, Princeton University Press, 2003, kapitulli 1; T. M. Apostol, *Mathematical Analysis*, 2nd ed., trajtimi i serive funksionale dhe ortogonalitetit.