UNIVERSITETI I SHKODRËS “LUIGJ GURAKUQI”
FAKULTETI I SHKENCAVE TË NATYRËS · DEPARTAMENTI I MATEMATIKËS

ANALIZË MATEMATIKE III

LEKSIONI 7

Seritë e Taylor-it dhe aplikimet

Autore: Prof. As. Dr. Siditë Duraj
Programi i studimit të ciklit të parë në Matematikë · Viti akademik 2026–2027

---

1 Rezultatet e të nxënit dhe lidhjet konceptuale

Në përfundim të kapitullit studenti duhet të mund të: (i) ndërtojë polinomin Taylor rreth një qendre; (ii) vërtetojë formulën e Taylor-it me mbetje të Lagranzhit në hipoteza të qarta; (iii) dallojë një formulë me mbetje nga përfaqësimi i funksionit me seri; (iv) vendosë kufij të garantuar për gabimin; (v) zbatojë zhvillime klasike vetëm në bashkësinë e tyre të vlefshmërisë.

Harta e ideve. Derivatet në qendër $\longrightarrow$ polinomi Taylor $\longrightarrow$ mbetja $\longrightarrow$ kushti $R_n(x)\to 0$ $\longrightarrow$ përfaqësimi me seri $\longrightarrow$ përafrimi dhe kontrolli numerik.

2 Polinomi Taylor dhe mbetja

Përkufizim 2.1. Nëse f ka derivate deri në rendin n në a, *polinomi Taylor i rendit* n është

$$T_{n,a}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Për $a=0$ quhet polinomi Maclaurin.

Mbetja përcaktohet saktësisht nga $R_{n,a}(x)=f(x)-T_{n,a}(x)$. Prandaj identiteti $f(x)=T_{n,a}(x)+R_{n,a}(x)$ është i vërtetë për çdo n për të cilin polinomi përcaktohet; kjo nuk provon vetvetiu se $R_{n,a}(x)\to 0$.

Teorema 2.2 (Taylor me mbetje të Lagranzhit)**.** *Le të jenë $a\neq x$ dhe f me n derivate të vazhdueshme në segmentin me skaje a,x dhe me derivat të rendit $n+1$ në brendësi. Atëherë ekziston ξ rreptësisht ndërmjet a dhe x i tillë që*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Vërtetim. Shënojmë $T=T_{n,a}$ dhe vendosim $K=(f(x)-T(x))/(x-a)^{n+1}$. Për t ndërmjet a dhe x përcaktojmë

$$F(t)=f(t)-T(t)-K(t-a)^{n+1}.$$

Kemi $F(a)=F'(a)=\cdots=F^{(n)}(a)=0$ dhe $F(x)=0$. Duke zbatuar $n+1$ herë teoremën e Rolle-it në intervalet përkatëse, ekziston ξ brenda segmentit për të cilin $F^{(n+1)}(\xi)=0$. Meqë $T^{(n+1)}=0$ dhe derivati i rendit $n+1$ i $K(t-a)^{n+1}$ është $(n+1)!K$, marrim $f^{(n+1)}(\xi)=(n+1)!K$. Zëvendësimi i K jep formulën. $\square$

Pohim 2.3 (Vlerësim i mbetjes)**.** *Nëse* $\left|f^{(n+1)}(t)\right| \leq M$ *në segmentin me skaje* a, x*, atëherë*

$$|R_{n,a}(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}\,|x-a|^{n+1}\,.$$

Vërtetim. Nga forma e Lagranzhit $R_{n,a}(x) = f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}/(n+1)!$. Marrim vlerën absolute dhe përdorim kufirin M. □

3 Nga polinomi te seria Taylor

Përkufizim 3.1. Seria formale e Taylor-it për f rreth a është $\sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(a)(x-a)^k/k!$ nëse të gjitha derivatet ekzistojnë në a. Funksioni quhet *analitik në* a nëse kjo seri konvergjon drejt $f(x)$ në një interval të hapur rreth a.

Teorema 3.2 (Kushti i përfaqësimit)**.** *Për një* x *të fiksuar ku seria Taylor konvergjon, kemi*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} R_{n,a}(x) = 0.$$

Vërtetim. Identiteti $f(x) = T_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$ jep pohimin duke kaluar në limit, sepse shumat e pjesshme të serisë janë pikërisht $T_{n,a}(x)$. □

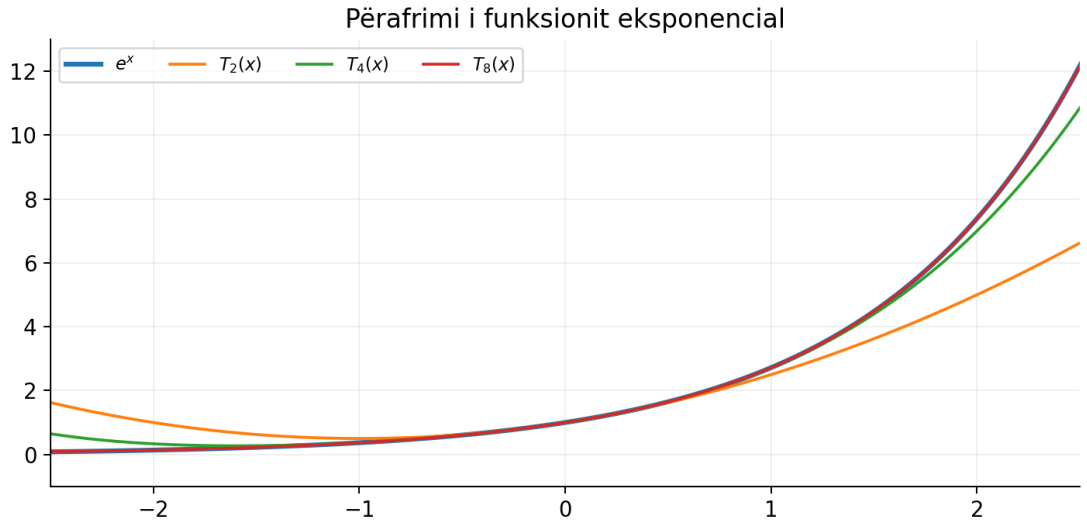
4 Zhvillimet klasike dhe bashkësitë e vlefshmërisë

Duke përdorur kontrollin e mbetjes dhe serinë gjeometrike, përfitojmë:

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, && x \in \mathbb{R},\\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, && x \in \mathbb{R},\\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, && x \in \mathbb{R},\\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n, && |x| < 1,\\
\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, && -1 < x \leq 1.
\end{aligned}$$

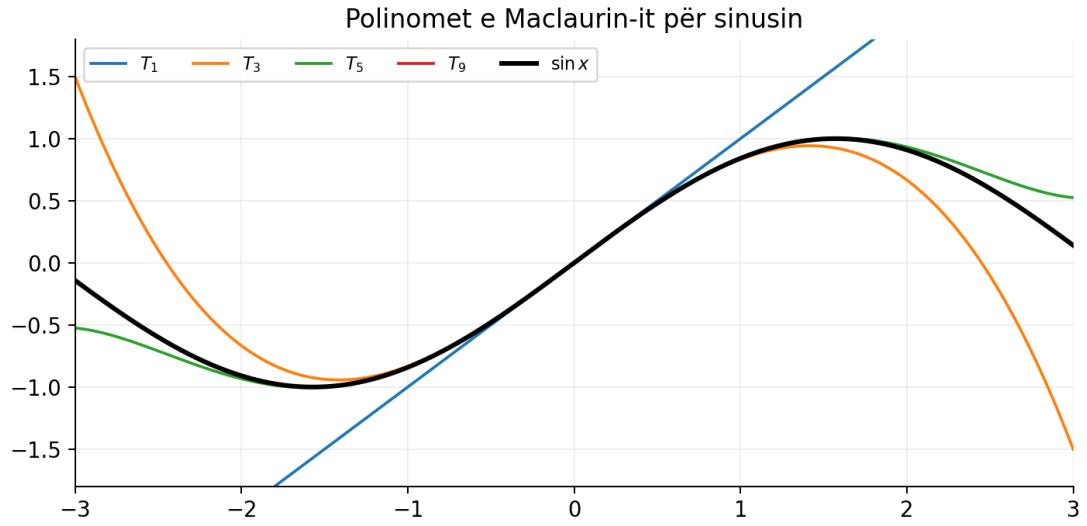
Identiteti për logaritmin mund të nxirret duke integruar serinë gjeometrike të $1/(1+t)$ për $|x| < 1$. Në skajin $x = 1$ konvergjenca vjen nga kriteri i Leibnizit; në $x = -1$ seria është harmonike me shenjë negative dhe divergon.

5 Figura 1: përafrimi i funksionit eksponencial



Interpretim. Për një x të fiksuar, polinomet e rendit më të lartë i afrohen e^x; në intervale të kufizuara konvergjenca është uniforme, nga kontrolli me faktoriel.

6 Figura 2: polinomet Maclaurin për sinusin



Vërejtje. Polinomet e rendit tek ndryshojnë me çdo dy shkallë; afërsia grafike nuk zëvendëson vlerësimin e mbetjes.

7 Vlerësimi rigoroz i gabimit

Për $f(x) = e^x$ rreth zeros, për $|x| \le A$ kemi

$$|e^x - T_{n,0}(x)| \le \frac{e^A A^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Në veçanti, për të përafruar $e^{1/2}$ me gabim më të vogël se 10^{-5} mund të zgjedhim një n që e bën anën e djathtë më të vogël se 10^{-5}; kjo është një garanci apriori.

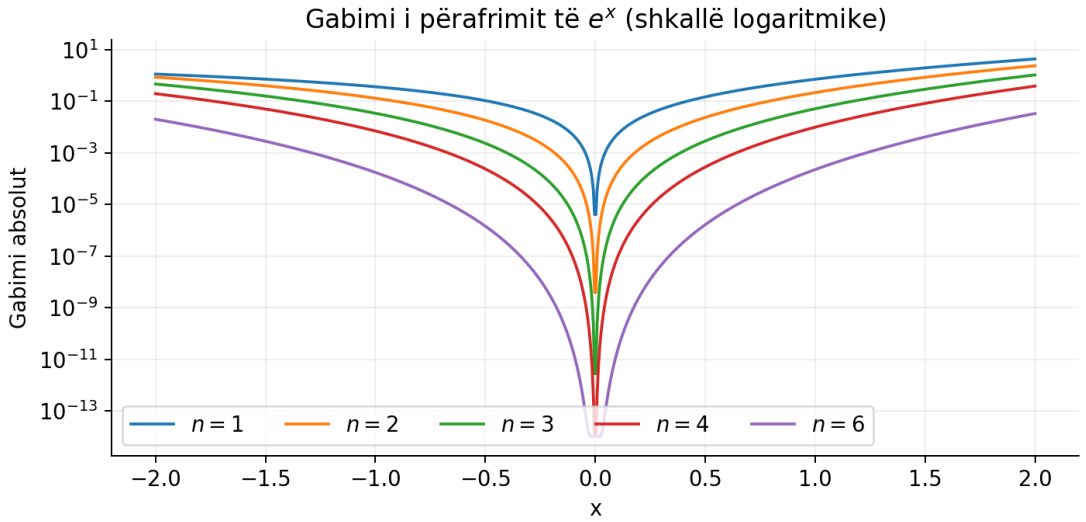


Figura 3. Gabimi absolut i polinomeve të e^x në shkallë logaritmike. Grafiku nuk garanton kufirin e gabimit jashtë segmentit të paraqitur.

8 Një funksion C^∞ joanalitik

Vendosim

$$g(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Për çdo $m \geq 0$ ekziston një polinom P_m i tillë që $g^{(m)}(x) = P_m(1/x)e^{-1/x^2}$ për $x \neq 0$. Nga kufiri $t^q e^{-t^2} \to 0$ kur $t \to +\infty$ për çdo $q \geq 0$, me induksion rezulton $g^{(m)}(0) = 0$ për çdo m. Pra seria Taylor në zero është identikisht zero, por $g(x) > 0$ për $x \neq 0$. Kështu lëmueshmëria e pafundme nuk implikon analiticitet.

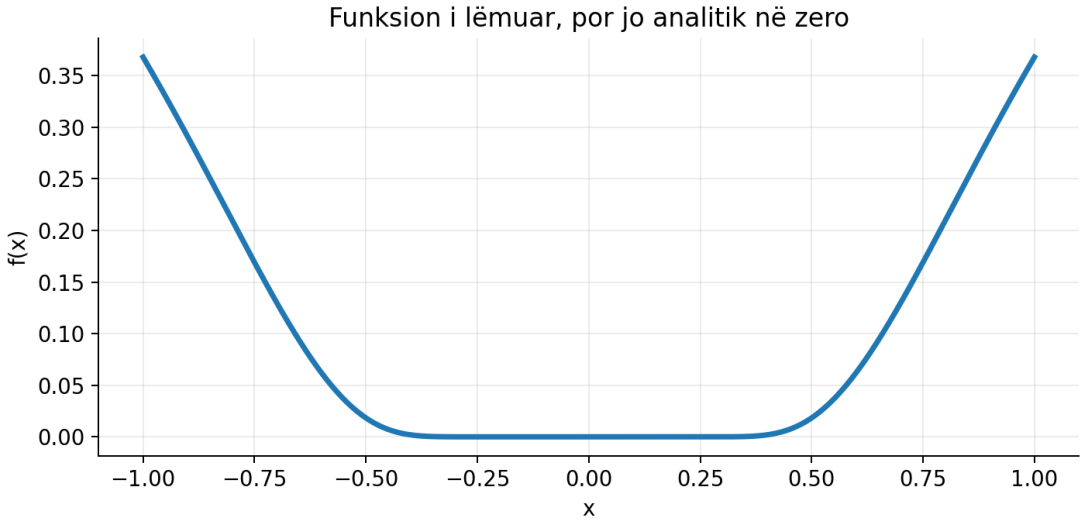


Figura 4. Funksioni g është pozitiv jashtë zeros, megjithëse të gjithë koeficientët Taylor në zero janë zero.

9 Dallimi mes formulës së Taylor-it dhe serisë së Taylor-it

Për çdo rend të fundmë për të cilin vlejnë hipotezat, formula e Taylor-it jep një identitet të saktë. Seria e Taylor-it është një objekt i pafundmë. Për të provuar që shuma e saj është funksioni fillestar në një pikë x, duhet të vërtetojmë $\lim_{n\to\infty} R_{n,a}(x) = 0$. Ky kalim nuk vjen vetëm nga ekzistenca e të gjitha derivateve.

Pohim 9.1 (Kusht i mjaftueshëm i përfaqësimit uniform)**.** *Le të jetë $f \in C^\infty([a-r, a+r])$, $r > 0$. Nëse ekzistojnë $M, B > 0$ të pavarur nga n të tillë që*

$$\sup_{|t-a|\le r} |f^{(n)}(t)| \le MB^n \qquad (n \ge 0),$$

atëherë seria Taylor rreth a konvergjon uniformisht drejt f në $[a-r, a+r]$.

Vërtetim. Për x në segment, nga forma e Lagranzhit, për çdo n,

$$|R_{n,a}(x)| \le \frac{MB^{n+1}}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \le M\frac{(Br)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ana e djathtë nuk varet nga x dhe tenton në zero, sepse raporti i dy kufizave radhazi është $(Br)/(n+2) \to 0$. Për rrjedhojë $\sup_{|x-a|\le r} |R_{n,a}(x)| \to 0$, çka provon konvergjencën uniforme. □

10 Vërtetimi i zhvillimeve klasike

10.1 Funksioni eksponencial

Për çdo $x \in \mathbb{R}$, derivati i rendit $n+1$ i e^x është e^x. Në segmentin që bashkon 0 me x kemi $e^t \le e^{|x|}$, prandaj

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \le \frac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!} \longrightarrow 0.$$

Në çdo $[-A, A]$ i njëjti vlerësim me $|x| \le A$ jep konvergjencë uniforme.

10.2 Sinusi dhe kosinusi

Të gjitha derivatet e sinusit dhe kosinusit kanë modul jo më të madh se 1. Kështu, për të dy funksionet,

$$|R_n(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \longrightarrow 0.$$

Koeficientët në zero japin zhvillimet e seksionit të mëparshëm. Kujdes: rendi i polinomit nuk është i njëjtë me numrin e termave jozero, sepse derivatet e rendit çift të sinusit dhe të rendit tek të kosinusit zhduken në zero.

10.3 Logaritmi dhe kontrolli i skajeve

Për $|x| < 1$, identiteti gjeometrik

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{\infty} (-t)^k$$

konvergjon uniformisht në çdo segment $[-r, r]$, $r < 1$. Integrimi nga 0 në x është i justifikuar dhe jep

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}.$$

Në $x = 1$ kjo seri konvergjon sipas Leibnizit dhe shuma është $\ln 2$: kufiri në skaj merret nga vazhdimësia e funksionit dhe teorema e Abelit (ose nga integrimi me kontroll të veçantë). Në $x = -1$ shfaqet $-\sum 1/n$, prandaj seria divergon. Kështu intervali real i përfaqësimit është $(-1, 1]$.

11 Kufijtë e gabimit dhe zgjedhja e rendit

Teorema 11.1 (Kontrolli uniform i mbetjes)**.** *Nëse $f \in C^{n+1}([-A, A])$ dhe $|f^{(n+1)}(t)| \le M_{n+1}$ për $|t| \le A$, atëherë polinomi Maclaurin plotëson*

$$\sup_{|x|\le A} |f(x) - T_{n,0}(x)| \le \frac{M_{n+1}A^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Vërtetim. Për çdo x në segment, zbatimi i formulës së Lagranzhit në segmentin me skaje $0, x$ jep një pikë ξ_x në të cilën vlen vlerësimi. Pasi ana e djathtë nuk varet nga x, marrja e supremumit mbi segment ruan pabarazinë. □

Shembull 11.2 (Numri i termave për e^x)**.** Për të garantuar gabim nën 10^{-4} në $[-1, 1]$, mjafton

$$\frac{e}{(n+1)!} < 10^{-4}.$$

Për $n = 7$, $e/8! \approx 6.74 \cdot 10^{-5}$ dhe kushti plotësohet. Për $n = 6$, $e/7! \approx 5.39 \cdot 10^{-4}$ nuk plotësohet; pra rendi 7 është më i vogli që kalon *këtë kufi të mjaftueshëm*, jo domosdoshmërisht rendi minimal i përafrimit real.

12 Përgjithësimi rreth një qendre jo zero

Nëse $f(x) = \ln x$ dhe $a = 1$, për $x > 0$ derivatet në qendër janë $f(1) = 0$, $f^{(k)}(1) = (-1)^{k-1}(k-1)!$ për $k \ge 1$. Prandaj

$$T_{n,1}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k,$$

me intervalin e konvergjencës së serisë $0 < x \le 2$. Në skajin $x = 2$ vlen Leibnizi; në $x = 0$ seria divergon. Dalloni qendrën e zhvillimit nga intervali ku përfaqësimi është i vlefshëm.

13 Vërtetim i zgjeruar: një funksion i lëmuar joanalitik

Për $x \neq 0$ vendosim $u = 1/x$ dhe $g(x) = e^{-u^2}$. Nga rregulli i zinxhirit,

$$\frac{d}{dx}\big(P(u)e^{-u^2}\big) = \big(-u^2P'(u) + 2u^3P(u)\big)e^{-u^2}.$$

Kështu, nëse $g^{(m)}(x) = P_m(1/x)e^{-1/x^2}$ për $x \neq 0$, atëherë kjo formë ruhet për derivatin vijues me $P_{m+1}(u) = -u^2P_m'(u) + 2u^3P_m(u)$. Rasti fillestar është $P_0 \equiv 1$.

Për çdo numër natyror q, duke marrë $t = 1/|x|$ fitojmë $|x|^{-q}e^{-1/x^2} = t^q e^{-t^2} \to 0$, sepse eksponenciali dominon çdo polinom. Nëse $g^{(m)}(0) = 0$, atëherë

$$\lim_{h\to 0} \frac{g^{(m)}(h) - g^{(m)}(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{P_m(1/h)e^{-1/h^2}}{h} = 0.$$

Pra $g^{(m+1)}(0) = 0$. Sipas induksionit, të gjitha derivatet në zero janë zero, por $g(x) > 0$ për $x \neq 0$. Për rrjedhojë seria Taylor në zero është identikisht zero dhe nuk e përfaqëson g në asnjë interval rreth zeros.

14 Hartë konceptuale për vetëkontroll

Derivatet në qendër $\longrightarrow$ Polinomi Taylor $\longrightarrow$ Mbetja
Mbetja tenton në zero $\Longrightarrow$ Përfaqësim me seri
Kontroll i supremumit $\Longrightarrow$ Garanci uniforme e përafrimit

Pyetje kritike. Në cilin kalim përdoret ekzistenca e derivatit të rendit $n+1$? Në cilin kalim përdoret kalimi $n \to \infty$? Pse një grafik nuk e vërteton kufirin supremum të gabimit?

15 Gabime të zakonshme dhe kontrolli i hipotezave

1. Nga ekzistenca e derivateve të të gjitha rendeve nuk përfundon automatikisht $f = \sum f^{(n)}(a)(x-a)^n/n!$.
2. Formula e Taylor-it me mbetje nuk është e njëjtë me identitetin e një serie të pafundme. Duhet provuar $R_n(x) \to 0$.
3. Intervali i vlefshmërisë së zhvillimit logaritmik nuk mund të zgjerohet duke zëvendësuar pa kontroll $x = 2$.
4. Kufiri i gabimit i nxjerrë për $|x| \le A$ nuk mund të përdoret pa justifikim jashtë atij intervali.

16 Pyetje për studim të pavarur

1. Përse forma e Lagranzhit vlen për çdo rend të fundmë, por nuk garanton konvergjencën e serisë Taylor?
2. Në ç'mënyrë kontrollohet uniformisht gabimi i zhvillimit të e^x në $[-A, A]$?
3. Ndërtoni polinomin e rendit 3 për $\ln(1+x)$ dhe studioni bashkësinë ku seria konvergjon drejt logaritmit.

Shënim metodologjik. Grafikat ilustrojnë sjelljen e përafrimeve; kontrolli i saktësisë së një përafrimi mbështetet në vlerësimin e mbetjes dhe jo vetëm në ngjashmërinë vizuale.