CIKLI I PARË I STUDIMEVE • MATEMATIKË • 2026–2027

Leksioni 8

Seritë e Fourier-it dhe zbatimet

Autore: Prof. As. Dr. Siditë Duraj
Universiteti i Shkodrës "Luigj Gurakuqi"
Fakulteti i Shkencave të Natyrës, Departamenti i Matematikës

Pyetja qendrore. Kur një funksion periodik mund të përfaqësohet me harmonikë trigonometrikë? Çfarë kuptimi ka konvergjenca në pikat e kërcimit dhe si kontrollohet cilësia e përafrimit?

1 Rezultatet e të nxënit

Në përfundim studenti duhet të jetë në gjendje: (1) të nxjerrë koeficientët e Fourier-it nga ortogonaliteti; (2) të zbatojë simetrinë për funksione çift dhe tek; (3) të formulojë saktë një kriter të konvergjencës pikësore; (4) të dallojë konvergjencën pikësore nga ajo në mesatare katrore; (5) të zbatojë mesataret e Fejérit; (6) të interpretojë identitetin e Parsevalit dhe dukurinë e Gibbs-it.

2 Harta konceptuale dhe nocionet paraprake

Rruga logjike: ortogonaliteti ⇒ koeficientët ⇒ shumat e pjesshme ⇒ bërthama e Dirichlet-it ⇒ konvergjenca pikësore. Rruga plotësuese është: mesataret e Fejérit ⇒ konvergjenca uniforme për funksione të vazhdueshme periodike ⇒ dendësia e polinomeve trigonometrike ⇒ identiteti i Parsevalit në L^2. Punojmë me funksione reale 2π-periodike, të integrueshme në kuptimin e Rimanit në $[-\pi,\pi]$ për përkufizimin fillestar të koeficientëve. Në pjesët mbi L^2 përdorim funksione katror-integrueshme në kuptimin e Lebegut.

3 Ortogonaliteti dhe koeficientët e Fourier-it

Për $m,n\ge 1$ vlejnë

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)\,dx=\pi\delta_{mn},\qquad \int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,dx=\pi\delta_{mn},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\cos(mx)\,dx=0,\qquad \int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\,dx=0.$$

Për f të integrueshëm përcaktojmë

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx,\qquad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\,dx,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)\,dx,\qquad n\ge 1.$$

Shuma e pjesshme e rendit N është

$$S_Nf(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}\bigl(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\bigr).$$

Pohim 3.1. *Nëse f është çift, atëherë $b_n=0$ për të gjithë n; nëse është tek, $a_0=a_n=0$ për të gjithë n.*

Vërtetim. Produkti i funksionit çift me $\sin(nx)$ është tek dhe integrali në interval simetrik është zero. Rasti tjetër argumentohet duke përdorur çiftësinë e $\cos(nx)$. □

4 Projeksioni ortogonal dhe optimaliteti

Për $f, g \in L^2[-\pi, \pi]$ vendosim $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} fg$. Hapësira T_N e polinomeve trigonometrike me frekuenca jo më të mëdha se N ka bazë ortogonale $1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos Nx, \sin Nx$.

Teoremë 4.1 (Përafrimi optimal në mesatare katrore)**.** *Për çdo $p \in T_N$,*

$$\|f - p\|_{L^2}^2 = \|f - S_N f\|_{L^2}^2 + \|S_N f - p\|_{L^2}^2 .$$

Prandaj $S_N f$ minimizon në mënyrë unike gabimin L^2 ndërmjet të gjithë polinomeve të T_N.

Vërtetim. Nga përkufizimi i koeficientëve, $f - S_N f$ është ortogonal me çdo vektor të T_N. Shkruajmë $f - p = (f - S_N f) + (S_N f - p)$ dhe zbatojmë Pitagorën në L^2. Barazia e normës është zero vetëm kur $p = S_N f$ pothuajse kudo, prandaj edhe si polinome. □

5 Bërthama e Dirichlet-it

Vendosim

$$D_N(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos(nt) = \frac{\sin((N + \frac{1}{2})t)}{2\sin(t/2)}, \quad t \notin 2\pi\mathbb{Z}.$$

Shprehja e fundit ka vazhdim në $t = 0$ me vlerë $N + \frac{1}{2}$. Nga formulat e koeficientëve dhe identiteti i këndit të ndryshimit,

$$S_N f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - t) D_N(t)\, dt.$$

Në veçanti, $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\, dt = 1$.

Teoremë 5.1 (Konvergjenca në një pikë; versioni me derivatet njëanëshe)**.** *Supozojmë që f është 2π-periodik, pjesë-pjesë C^1 në një periodë dhe ka një numër të fundmë kërcimesh. Atëherë për çdo x,*

$$\lim_{N\to\infty} S_N f(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}.$$

Në një pikë vazhdueshmërie, kufiri është $f(x)$.

Vërtetim. Duke përdorur çiftësinë e D_N dhe normalizimin, diferenca ndërmjet $S_N f(x)$ dhe mesatares së kufijve njëanësorë shkruhet si integral i një funksioni $h_x(t)$ të shumëzuar me $\sin((N + \frac{1}{2})t)$. Pas ndarjes me $\sin(t/2)$, kushtet pjesë-pjesë C^1 dhe ekzistenca e derivateve njëanëshe bëjnë që funksioni përkatës të jetë i integrueshëm në $[0, \pi]$; singulariteti në zero është i heqshëm në kuptimin e kufizueshmërisë lokale. Lema e Riman–Lebegut jep kalimin e integralit drejt zeros; një vërtetim i saj jepet më poshtë. □

Lema e Riman–Lebegut: formulim dhe vërtetim

Lemë 5.2. *Nëse $g \in L^1([a, b])$, atëherë*

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \int_a^b g(t) \sin(\lambda t)\, dt = 0, \qquad \lim_{|\lambda|\to\infty} \int_a^b g(t) \cos(\lambda t)\, dt = 0.$$

Vërtetim. Për funksionin tregues të $[u, v] \subset [a, b]$, integrimi i drejtpërdrejtë i sinusit dhe kosinusit jep module jo më të mëdha se $2/|\lambda|$. Nga linearieti e njëjta veti vlen për çdo funksion shkallë s me

numër të fundmë intervalesh. Për $g \in L^1$ dhe $\varepsilon > 0$ zgjedhim një funksion të tillë s me $\int_a^b |g - s| < \varepsilon$, nga dendësia e funksioneve shkallë në L^1. Atëherë

$$\left| \int_a^b g(t) \sin(\lambda t)\, dt \right| \leq \varepsilon + \left| \int_a^b s(t) \sin(\lambda t)\, dt \right|.$$

Duke kaluar në kufirin e sipërm për $|\lambda| \to \infty$, rezultati është jo më i madh se ε. Meqë ε është arbitrar, integrali priret në zero. Argumenti për kosinusin është identik. □

Vërejtje. Te teorema e konvergjencës pikësore, funksioni që shumëzon sinusin është i integrueshëm falë rregullsisë pjesë-pjesë të f; kjo është hipoteza që lejon përdorimin e lemës.

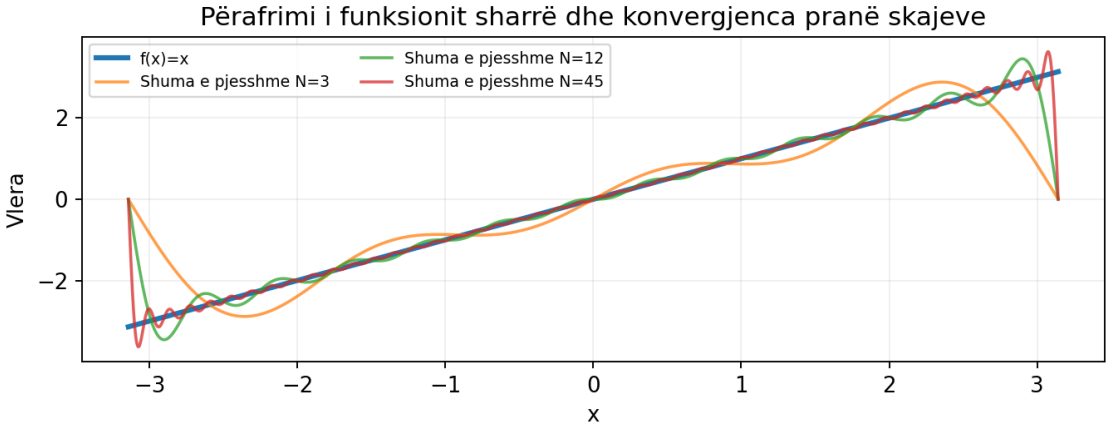


Figura 1. Shumat e pjesshme të $f(x) = x$ në $(-\pi, \pi)$; në skaje konvergjojnë drejt mesatares së dy kufijve periodikë.

6 Dukuria e Gibbs-it: interpretimi dhe kufijtë e tij

Te funksionet me kërcime, shumat e pjesshme të Fourier-it shfaqin luhatje pranë pikës së kërcimit. Mbikalimi relativ i parë priret drejt rreth 0.08949 të madhësisë së kërcimit. Kjo nuk është përqindje e vlerës së funksionit. Në pikat fikse larg kërcimit, shumat e pjesshme konvergjojnë sipas teoremës së mësipërme, por përafrimi nuk konvergjon uniformisht në interval që përmban kërcimin, sepse shumat e pjesshme janë të vazhdueshme.

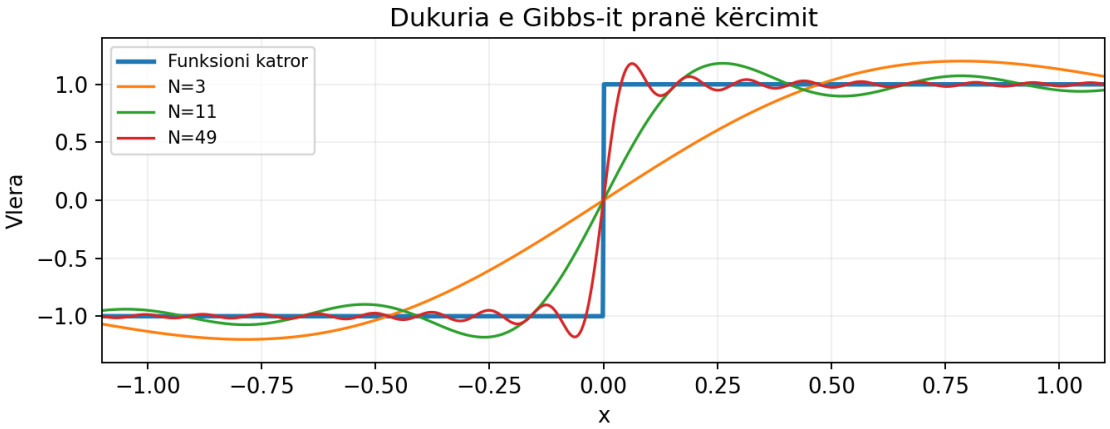


Figura 2. Luhatja pranë kërcimit për valën katrore; rritja e rendit ngushton zonën, por nuk e zhduk mbikalimin relativ.

7 Mesataret e Fejérit

Përkufizim 7.1. Mesatarja e rendit N e Fejérit përcaktohet si

$$\sigma_N f = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} S_k f.$$

Ajo ka paraqitjen e konvolucionit me bërthamën jonegative

$$F_N(t) = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin((N+1)t/2)}{\sin(t/2)} \right)^2, \qquad \sigma_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) F_N(t)\, dt,$$

ku $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(t)\, dt = 1$.

Teoremë 7.2 (Fejér). *Nëse f është i vazhdueshëm dhe 2π-periodik, atëherë $\sigma_N f \to f$ uniformisht në $\mathbb{R}$.*

Vërtetim. Nga vazhdueshmëria uniforme zgjedhim $\delta > 0$ që $|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon$ për $|t| < \delta$, uniformisht ndaj x. Në integralin e gabimit ndajmë rajonin $|t| < \delta$ nga pjesa plotësuese. Pjesa e parë kontrollohet nga ε falë jonegativitetit dhe masës njësi të F_N. Në pjesën e dytë, $F_N(t) \le [(N+1)\sin^2(\delta/2)]^{-1}$, prandaj kontributi shkon uniformisht në zero. □

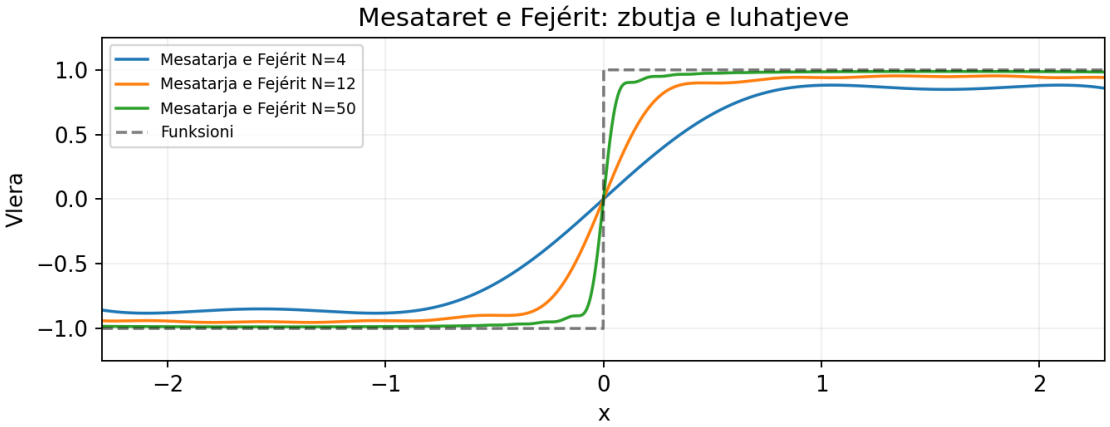


Figura 3. Mesataret e Fejérit për valën katrore: afër kërcimit ato zbusin luhatjet e shumave të pjesshme.

8 Identiteti i Parsevalit dhe energjia

Teoremë 8.1 (Parseval). *Për çdo $f \in L^2[-\pi, \pi]$ real,*

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Vërtetim. Pitagora për projeksionin jep identitetin e Bessel-it për $S_N f$ dhe $\|f - S_N f\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 - \|S_N f\|_{L^2}^2$. Për të kaluar në barazinë e pakufizuar mjafton të provohet se polinomet trigonometrike janë të dendura në L^2. Teorema e Fejérit e jep dendësinë uniforme për funksionet e vazhdueshme periodike; këto janë të dendura në L^2, prandaj projeksionet $S_N f$ konvergjojnë te f në normën L^2. Marrim kufirin në identitetin e Pitagorës. □

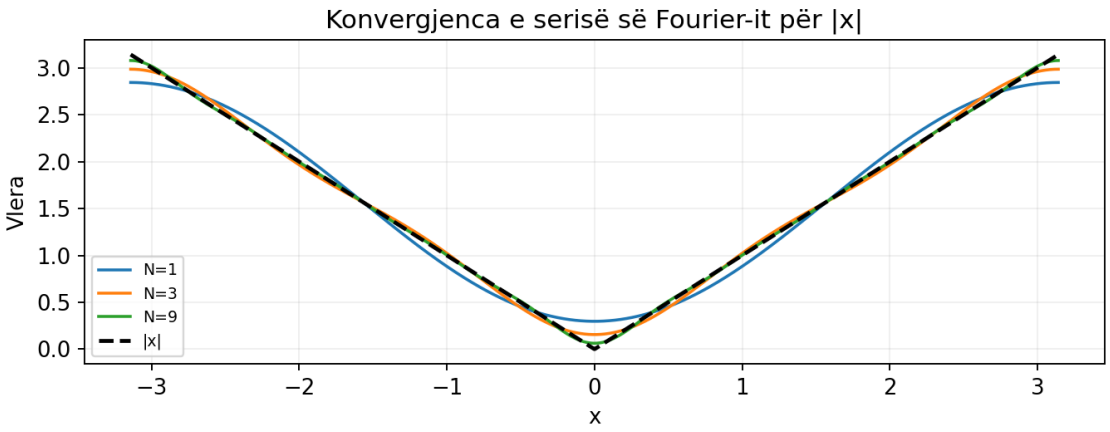


Figura 4. Përafrimi i $|x|$ me harmonikë kosinusë; koeficientët bien me rend $1/n^2$.

9 Tre shembuj të zgjidhur

Shembull 9.1 (Funksioni sharrë)**.** Për $f(x) = x$ në $(-\pi, \pi)$ me vazhdim periodik, $a_0 = a_n = 0$ dhe me integrim sipas pjesëve

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

Prandaj $f(x) \sim 2\sum_{n\ge 1}(-1)^{n+1}\sin(nx)/n$. Barazia e shumës me x vlen për $-\pi < x < \pi$; në $x = \pm\pi$ shuma është zero.

Shembull 9.2 (Moduli)**.** Për $f(x) = |x|$, $b_n = 0$, $a_0 = \pi$ dhe

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^n - 1}{n^2}.$$

Kështu

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}, \qquad -\pi \le x \le \pi.$$

Shembull 9.3 (Vala katrore)**.** Për $f(x) = 1$ kur $0 < x < \pi$ dhe $f(x) = -1$ kur $-\pi < x < 0$, koeficientët jo-zero janë $b_n = 4/(\pi n)$ për n tek. Seria konvergjon drejt f në çdo pikë vazhdueshmërie, por drejt zero në kërcime.

10 Gabime të zakonshme dhe kontrolli kritik

1. Të supozohet se konvergjenca në L^2 nënkupton konvergjencë uniforme: kjo nuk vlen përgjithësisht.

2. Të kërkohet barazia me vlerën e funksionit në kërcim; kufiri është mesatarja e kufijve njëanësorë.

3. Të identifikohet dukuria e Gibbs-it me divergjencë: luhatjet lokale janë të pajtueshme me konvergjencën pikësore larg kërcimit.

4. Të përdoret Parsevali pa kontrolluar normimin e koeficientëve.

5. Të barazohen përfundimet e shumave S_N me ato të mesatareve σ_N; këto janë vargje të ndryshme.

11 Sintezë dhe detyra

Sinteza. Koeficientët dalin nga ortogonaliteti; shumat S_N janë projeksione optimale në L^2; konvergjenca pikësore kërkon hipoteza lokale; mesataret e Fejérit japin përafrim uniform për funksione të vazhdueshme periodike.

Detyra për studim. (a) Nxirrni koeficientët për $f(x) = x^2$. (b) Verifikoni Parsevalin për $f(x) = x$. (c) Shpjegoni pse një funksion me kërcim nuk është kufi uniform i shumave të pjesshme të Fourier-it në një interval që përmban kërcimin.

Literatura orientuese. E. Stein dhe R. Shakarchi, *Fourier Analysis: An Introduction*, Princeton, 2003; A. Zygmund, *Trigonometric Series*, Cambridge, 1959; W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw–Hill, 1976. Titujt origjinalë ruhen për saktësi bibliografike.

ZGJERIM I KAPITULLIT 8

Seritë e Fourier-it: shpjegime dhe shembuj të zgjeruar

Prof. As. Dr. Siditë Duraj
Universiteti i Shkodrës “Luigj Gurakuqi”

Qëllimi i pjesës plotësuese

Ky material e zgjeron leksionin bazë me demonstrime, ushtrime të analizuara dhe dallime metodologjike. Pjesa trigonometrike mbahet e përqendruar; theksi vendoset te tri kuptime të ndryshme të konvergjencës, projeksioni dhe sjellja në kërcime.

1 Nga ortogonaliteti te koeficientët

Për një funksion real 2π-periodik $f \in L^2[-\pi,\pi]$ marrim

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx.$$

Nga ortogonaliteti i funksioneve $1, \cos nx, \sin nx$ dalin formulat e koeficientëve kur shumëzojmë shumën e fundme trigonometrike me funksionin përkatës bazë dhe integrojmë. Kjo nuk provon ende që *seria e pafundme* konvergjon pikësisht te f.

Shembull 1.1 (Funksioni $f(x) = x$ në $(-\pi,\pi)$)**.** *Zgjerimi periodik është tek, prandaj $a_0 = a_n = 0$. Mbetet*

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos(nx)}{n} + \frac{\sin(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

Në çdo $x \in (-\pi,\pi)$, teorema e konvergjencës pikësore jep

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sin(nx)}{n}.$$

Në $x = \pi$ shuma ka vlerën 0, sepse dy kufijtë anësorë periodikë janë π dhe $-\pi$.

2 Tre nocione konvergjence: çfarë provojnë dhe çfarë nuk provojnë

Për shumat $S_N f$ dallojmë:

1. **Pikësore**: për çdo x të dhënë $S_N f(x) \to g(x)$.
2. **Në mesatare katrore**: $\|S_N f - f\|_{L^2} \to 0$.
3. **Uniforme**: $\sup_x |S_N f(x) - f(x)| \to 0$.

Konvergjenca uniforme në interval të fundmë sjell konvergjencë në L^2, por e anasjellta nuk është e vërtetë. Në veçanti, L^2 nuk përcakton vlerat e funksionit në një numër të fundmë pikash: ndryshimi i vlerave atje nuk ndryshon normën L^2.

Pse konvergjenca uniforme dështon te kërcimi

Çdo shumë e pjesshme $S_N f$ është e vazhdueshme. Një kufi uniform i funksioneve të vazhdueshme është i vazhdueshëm. Prandaj shumat e pjesshme nuk mund të konvergjojnë uniformisht në një interval që përmban një kërcim të funksionit kufi.

Kjo provë nuk mbështetet vetëm te grafiku. Në pikën e kërcimit, seria klasike, nën kushtet e Dirichlet-it, konvergjon në mesataren e kufijve anësorë, jo domosdoshmërisht në vlerën që i është caktuar funksionit në atë pikë.

3 Shembulli i valës katrore dhe dukuria e Gibbs-it

Për $f(x) = 1$ në $(0, \pi)$, $f(x) = -1$ në $(-\pi, 0)$ dhe vazhdim 2π-periodik,

$$a_0 = a_n = 0, \qquad b_n = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi n}, & n \text{ tek}, \\ 0, & n \text{ çift}. \end{cases}$$

Rrjedhimisht

$$S_{2m+1}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{m} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}.$$

Pranë një kërcimi, pikat e maksimumit të lëkundjeve afrohen te kërcimi, por tejkalimi maksimal nuk zhduket. Kjo është dukuria e Gibbs-it. Larg kërcimeve, përafrimi zakonisht përmirësohet kur shtohen harmonikë.

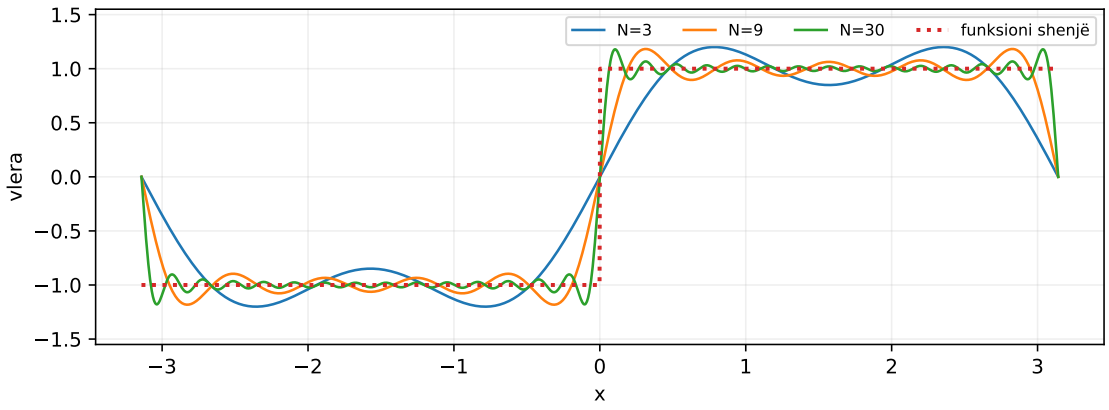


Figura 1. Shuma të pjesshme të valës katrore; grafiku ilustron, por nuk vërteton, konvergjencën.

4 Pse mesataret e Fejérit funksionojnë më mirë?

Përkufizojmë $\sigma_N f = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} S_k f$. Pas bashkimit të termave,

$$\sigma_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) F_N(t)\, dt, \qquad F_N(t) = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin((N+1)t/2)}{\sin(t/2)} \right)^2.$$

Bërthama F_N është jonegative dhe integrali i saj mbi $[-\pi,\pi]$ është 2π. Për $\delta>0$ fikse, masa e normalizuar jashtë $(-\delta,\delta)$ shkon në zero kur $N\to\infty$.

Teoremë 4.1 (Fejér, rast i funksionit të vazhdueshëm)**.** *Nëse f është i vazhdueshëm dhe 2π-periodik, atëherë $\sigma_N f\to f$ uniformisht në $\mathbb{R}$.*

Vërtetim. Vazhdueshmëria uniforme e f jep, për çdo $\varepsilon>0$, një $\delta>0$ të tillë që $|f(x-t)-f(x)|<\varepsilon/2$ për $|t|<\delta$. Shkruajmë diferencën $\sigma_N f(x)-f(x)$ si integral të $[f(x-t)-f(x)]F_N(t)/(2\pi)$ dhe e ndajmë sipas $|t|<\delta$ dhe $|t|\ge\delta$. Integrali i parë ka modul jo më të madh se $\varepsilon/2$. I dyti kufizohet nga $2\|f\|_\infty$ herë masa e normalizuar jashtë $(-\delta,\delta)$, e cila bëhet më e vogël se $\varepsilon/2$ për N mjaft të madh, në mënyrë të pavarur nga x. $\square$

5 Dy shembuj të shtjelluar për vetëstudim

Shembull 5.1 (Koeficientët e $|x|$ dhe një shumë numerike)**.** *Meqenëse $|x|$ është çift, $b_n=0$ dhe*

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,dx=\pi,\qquad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos(nx)\,dx=\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n-1}{n^2}.$$

Pra $a_n=0$ për n çift dhe $a_n=-4/(\pi n^2)$ për n tek. Në $x=0$ kemi $|0|=0$, kështu që

$$0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\quad\Longrightarrow\quad\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

Barazia në $x=0$ justifikohet nga konvergjenca e serisë së Fourier-it për këtë funksion të vazhdueshëm, pjesë-pjesë të lëmuar.

Shembull 5.2 (Parseval për $f(x)=x$)**.** *Nga $b_n=2(-1)^{n+1}/n$ dhe $a_n=a_0=0$, identiteti i Parsevalit në normalizimin e përdorur është*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2.$$

Ana e majtë është $2\pi^2/3$; ana e djathtë është $4\sum_{n\ge1}1/n^2$. Prandaj

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}}.$$

Kjo është një pasojë e Parsevalit, jo një provë elementare e tij.

6 Udhëzues metodologjik dhe detyra

Për një funksion të dhënë: (1) identifiko periodën dhe rregullsinë; (2) përdor simetrinë për të ulur numrin e integraleve; (3) njehso koeficientët me hapat e integrimit; (4) përcakto teoremën që lejon të identifikosh shumën; (5) shqyrto veçmas pikat e kërcimit; (6) dalloi pohimet pikësore, uniforme dhe në L^2.

Ushtrime për reflektim

A mundet një seri e Fourier-it të konvergjojë në normën L^2 por të mos konvergjojë uniformisht? Pse? Çfarë ndryshon kur zëvendësojmë shumat S_N me mesataret σ_N? Çfarë mund dhe nuk mund të konstatohet nga një grafik numerik me 30 harmonikë?