ANALIZË MATEMATIKE III • CIKLI I PARË I STUDIMEVE • 2026–2027

Leksioni 9

Funksionet me disa ndryshore, kufiri dhe vazhdueshmëria

Autore: Prof. As. Dr. Siditë Duraj
Universiteti i Shkodrës "Luigj Gurakuqi"
Fakulteti i Shkencave të Natyrës, Departamenti i Matematikës

Pyetja qendrore. Si përcaktohet një funksion i shumë ndryshoreve dhe si provohet kufiri i tij, kur pikës së afrimit mund t'i afrohemi në pafundësisht shumë drejtime e trajektore?

1 Rezultatet e të nxënit dhe njohuritë paraprake

Në fund të kapitullit studenti: (1) gjen fushën e përcaktimit dhe e interpreton gjeometrikisht; (2) dallon grafikun, nivelet dhe prerjet; (3) përdor përkufizimin ε–δ në $\mathbb{R}^2$; (4) provon mosekzistencën e kufirit me dy trajektore; (5) njeh kufizimet e provës vetëm përgjatë drejtëzave; (6) provon kufij duke përdorur koordinata polare dhe vlerësime uniforme; (7) zbaton teoremën e vazhdueshmërisë dhe të përbërjes. Njohuritë paraprake janë normat, kufijtë e vargjeve numerike, funksionet elementare dhe pabarazitë.

2 Harta konceptuale

Bashkësia e përcaktimit $D \longrightarrow$ **funksioni** $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \longrightarrow$ **grafiku dhe bashkësitë e nivelit** $\longrightarrow$ **kufiri në pikën e grumbullimit** $\longrightarrow$ **vazhdueshmëria**. Kriteret e ekzistencës përdorin: përkufizimin ε–δ, karakterizimin me vargje, vlerësimet në normë dhe koordinatat polare.

3 Përkufizimi, fusha dhe paraqitjet

Përkufizim 3.1. Një funksion real me dy ndryshore është një pasqyrim $f : D \to \mathbb{R}$, ku $D \subset \mathbb{R}^2$. Grafiku i tij është

$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D,\ z = f(x, y)\}.$$

Bashkësia e nivelit c është $N_c = \{(x, y) \in D : f(x, y) = c\}$.

Shembull 3.2. Për $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, kushti $9 - x^2 - y^2 \geq 0$ jep diskun $D = \{x^2 + y^2 \leq 9\}$. Grafiku është hemisfera e sipërme me rreze 3; nivelet $c \in [0, 3]$ përmbushin $x^2 + y^2 = 9 - c^2$.

Shembull 3.3. Për $g(x, y) = \dfrac{\ln(4 - x^2 - y^2)}{\sqrt{y - x}}$ kërkohet njëkohësisht $x^2 + y^2 < 4$ dhe $y > x$. Kushti i dytë është strikt sepse rrënja gjendet në emërues.

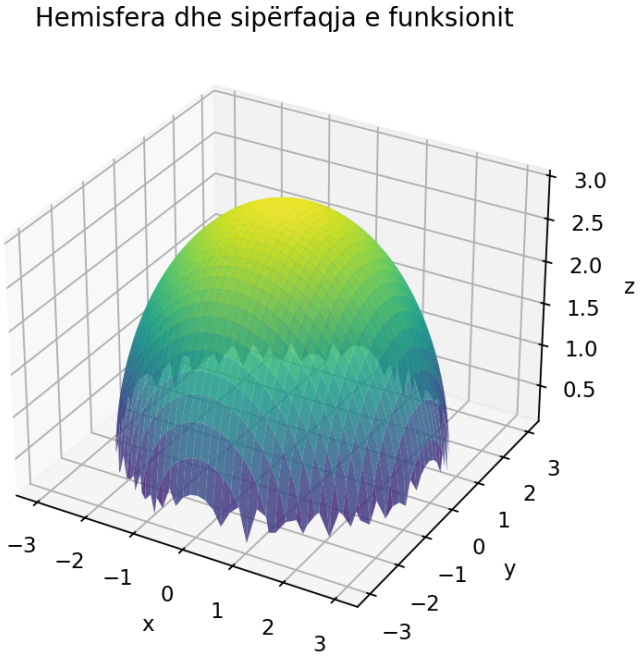


Figura 1. Hemisfera $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ dhe nivelet horizontale.

4 Topologjia elementare e planit

Norma euklidiane është $\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ dhe distanca midis dy pikave është norma e diferencës së tyre. Një pikë $a \in \mathbb{R}^2$ është pikë grumbullimi e D nëse çdo disk i hapur me qendër a përmban pika të D të ndryshme nga a. Përdorim $B_\delta(a) = \{p : \|p - a\|_2 < \delta\}$.

Përkufizim 4.1. Le të jetë a pikë grumbullimi e D. Themi $\lim_{p \to a,\, p \in D} f(p) = L$ nëse

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad p \in D,\ 0 < \|p - a\|_2 < \delta \implies |f(p) - L| < \varepsilon.$$

Kuantifikatorët janë vendimtarë: i njëjti δ duhet të funksionojë për të gjitha pikat p të mjaftueshme afër a, jo vetëm për pikat e një trajektoreje të zgjedhur.

5 Kriteri me vargje dhe uniciteti

Teoremë 5.1 (Kriteri i Hajnesit)**.** *Për a pikë grumbullimi të D, $\lim_{p \to a} f(p) = L$ nëse dhe vetëm nëse për çdo varg $p_n \in D \setminus \{a\}$ me $p_n \to a$ kemi $f(p_n) \to L$.*

Vërtetim. Nëse vlen përkufizimi ε–δ, për çdo ε marrim δ përkatëse dhe zgjedhim N që $0 < \|p_n - a\|_2 < \delta$ për $n \geq N$. Pastaj $|f(p_n) - L| < \varepsilon$. Në drejtimin e kundërt, nëse nuk ka kufi L, ekziston $\varepsilon_0 > 0$ i tillë që për çdo n zgjedhim $p_n \in D$ me $0 < \|p_n - a\|_2 < 1/n$ dhe $|f(p_n) - L| \geq \varepsilon_0$. Atëherë $p_n \to a$, por $f(p_n)$ nuk konvergjon drejt L, kundërshtim. □

Pohim 5.2 (Uniciteti)**.** *Nëse ekziston kufiri në një pikë grumbullimi, ai është unik.*

Vërtetim. Po të kishim dy kufij $L_1 \neq L_2$, vendosim $\varepsilon = |L_1 - L_2|/3$ dhe zgjedhim një pikë të $D \setminus \{a\}$ në diskun e përbashkët përkatës. Pabarazia trekëndore do të jepte $|L_1 - L_2| < 2|L_1 - L_2|/3$, kundërshtim. □

6 Trajektoret: metodë për të rrëzuar, jo për të vërtetuar

Shembull 6.1 (Dy trajektore)**.** Për $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$, përgjatë $y = 0$ kemi $f(x,0) = 0$, ndërsa përgjatë $y = x$ marrim $f(x,x) = 1/2$. Prandaj kufiri në $(0,0)$ nuk ekziston.

Shembull 6.2 (Të gjitha drejtëzat nuk mjaftojnë)**.** Për

$$h(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2}, \qquad (x,y) \neq (0,0),$$

përgjatë çdo drejtëze $y = mx$ (edhe $x = 0$) kufiri është 0, por përgjatë parabolës $y = x^2$ kemi $h(x,x^2) = 1/2$. Kufiri i përgjithshëm nuk ekziston.

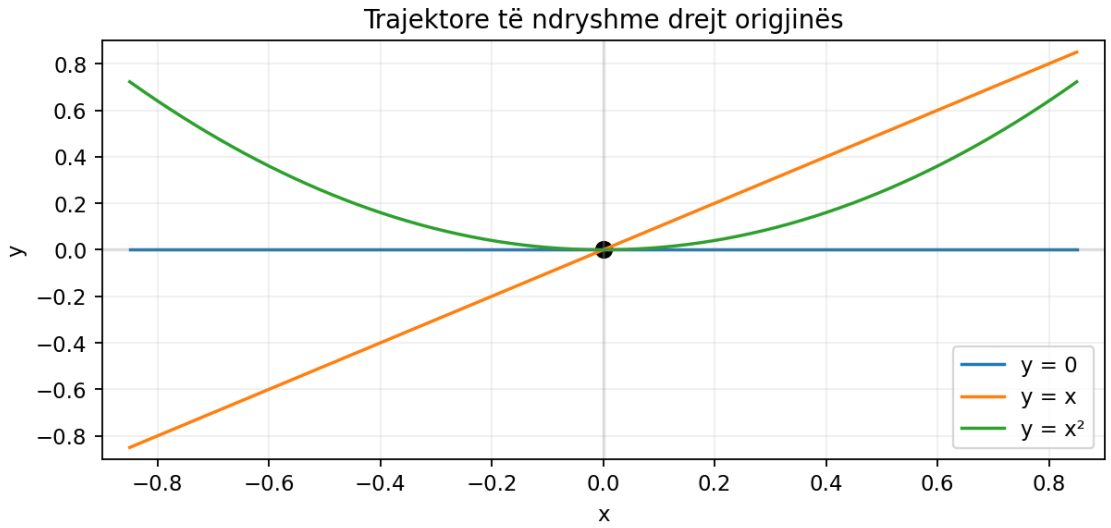


Figura 2. Dy trajektore drejt origjinës, me vlera kufitare të ndryshme.

7 Koordinatat polare dhe vlerësimet uniforme

Për $(x,y) \neq (0,0)$ vendosim $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, ku $r = \sqrt{x^2+y^2} > 0$. Vetëm kufiri për një kënd θ të fiksuar nuk mjafton; kërkohet vlerësim që vlen *uniformisht* ndaj këndit.

Teoremë 7.1 (Kriter i mjaftueshëm polar)**.** *Nëse për çdo $0 < r < r_0$ dhe çdo θ të lejuar vlen $|f(r\cos\theta, r\sin\theta) - L| \le \omega(r)$, ku $\omega(r) \to 0$ kur $r \to 0^+$, atëherë $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L$.*

Vërtetim. Për $\varepsilon > 0$ zgjedhim δ që $0 < r < \delta$ sjell $\omega(r) < \varepsilon$. Për çdo pikë me $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ marrim koordinatat e saj polare; vlerësimi i supozuar jep përkufizimin e kufirit. □

Shembull 7.2 (Kufi me vlerësim polar)**.** Për

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, \qquad (x,y) \neq (0,0),$$

kemi $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r\cos^2\theta\sin\theta$. Prandaj $|f| \le r \to 0$, uniformisht ndaj θ.

Shembull i ndërtuar me parametër: prova nuk varet nga drejtimi

Shqyrtojmë familjen

$$F_\alpha(x,y) = \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^\alpha}, \qquad (x,y) \neq (0,0), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Në koordinata polare shkruajmë

$$F_\alpha(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^{3-2\alpha}\cos^2\theta\sin\theta.$$

Nëse $\alpha < \frac{3}{2}$, atëherë $|F_\alpha| \le r^{3-2\alpha} \to 0$ uniformisht në θ, ndaj kufiri është 0. Nëse $\alpha = \frac{3}{2}$, përgjatë drejtëzës $y = x > 0$ shprehja merr një vlerë konstante jozero, ndërsa përgjatë $y = 0$ është zero. Nëse $\alpha > \frac{3}{2}$, përgjatë $y = x > 0$ moduli priret drejt pafundësisë, por përgjatë $y = 0$ mbetet zero. Në dy rastet e fundit nuk ekziston kufi real i fundmë.

Vërejtje. Dalloni rastin $\alpha = \frac{3}{2}$, ku kemi varësi nga këndi, nga rasti $\alpha > \frac{3}{2}$, ku shfaqet edhe rritje pa kufi në trajektore të caktuara.

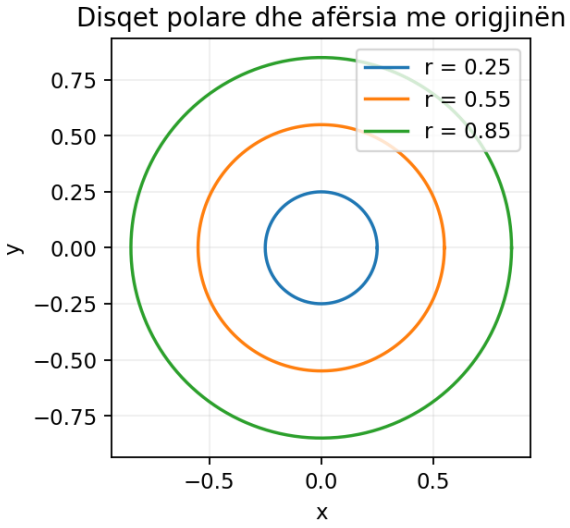


Figura 3. Qasja polare dhe kontrolli i funksionit për të gjitha drejtimet.

8 Vazhdueshmëria dhe operacionet

Përkufizim 8.1. Funksioni $f : D \to \mathbb{R}$ është i vazhdueshëm në $a \in D$ nëse për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston $\delta > 0$ që $p \in D$ dhe $\|p - a\|_2 < \delta$ japin $|f(p) - f(a)| < \varepsilon$.

Kur a është pikë grumbullimi kjo është ekuivalente me $\lim_{p\to a} f(p) = f(a)$. Për një pikë të izoluar të D, vazhdueshmëria vlen automatikisht sipas përkufizimit relativ.

Teoremë 8.2 (Operacionet dhe përbërja)**.** *Nëse f, g janë të vazhdueshme në $a \in D$, atëherë $f+g$, fg dhe λf janë të vazhdueshme në a; f/g është i vazhdueshëm kur $g(a) \neq 0$. Nëse $F : D \to \mathbb{R}^m$ është e vazhdueshme në a dhe $\varphi : \mathbb{R}^m \supset U \to \mathbb{R}$ është e vazhdueshme në $F(a)$, atëherë $\varphi \circ F$ është e vazhdueshme në a, kur përbërja është e përcaktuar.*

Vërtetim. Për shumën dhe prodhimin përdorim ligjet e kufirit me pabarazinë trekëndore; për pjesëtimin vazhdueshmëria e g siguron $|g(p)| \ge |g(a)|/2$ afër a. Për përbërjen: zgjedhim $\eta > 0$ nga

vazhdueshmëria e φ në $F(a)$ dhe më pas $\delta > 0$ nga vazhdueshmëria e F që $\|F(p) - F(a)\| < \eta$. Atëherë $|\varphi(F(p)) - \varphi(F(a))| < \varepsilon$. □

Shembull 8.3 (Vazhdueshmëria e një funksioni të përcaktuar pjesërisht)**.** Vendosim $f(0,0) = 0$ dhe $f(x,y) = x^2y/(x^2+y^2)$ për $(x,y) \neq (0,0)$. Nga vlerësimi polar më sipër kufiri është zero; prandaj funksioni është i vazhdueshëm edhe në origjinë.

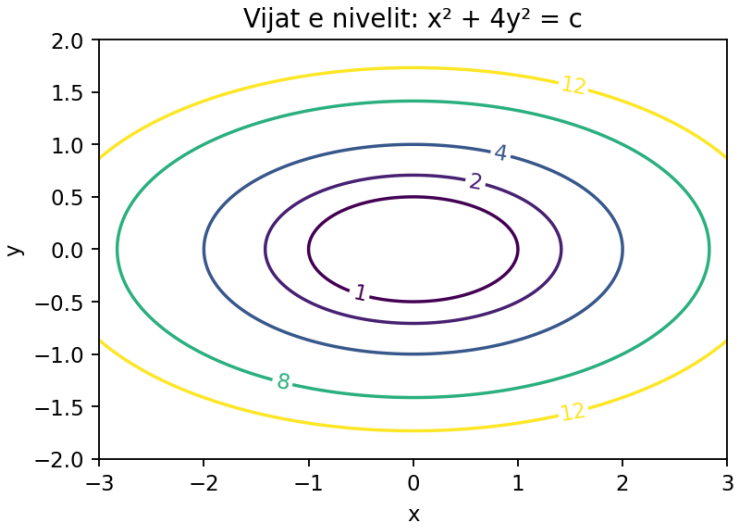


Figura 4. Bashkësitë e nivelit të një funksioni kuadratik dhe interpretimi gjeometrik.

9 Vazhdueshmëria uniforme në bashkësi kompakte

Përkufizim 9.1. Një funksion $f : K \to \mathbb{R}$ është uniformisht i vazhdueshëm në K kur

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall p, q \in K: \quad \|p - q\|_2 < \delta \implies |f(p) - f(q)| < \varepsilon.$$

Dallimi nga vazhdueshmëria pikësore është se δ nuk varet nga pika e zgjedhur e K.

Teoremë 9.2 (Hajne–Kantor në $\mathbb{R}^2$)**.** *Nëse $K \subset \mathbb{R}^2$ është kompakte dhe $f : K \to \mathbb{R}$ e vazhdueshme, atëherë f është uniformisht e vazhdueshme në K.*

Vërtetim. Supozojmë për kundërshtim se uniformiteti dështon. Atëherë ekziston $\varepsilon_0 > 0$ dhe për çdo $n \geq 1$ pika $p_n, q_n \in K$ me

$$\|p_n - q_n\|_2 < \frac{1}{n}, \qquad |f(p_n) - f(q_n)| \geq \varepsilon_0.$$

Nga kompaktësia (karakterizimi me vargje në $\mathbb{R}^2$) p_n ka një nënvarg $p_{n_k} \to p \in K$. Pabarazia trekëndore jep

$$\|q_{n_k} - p\|_2 \leq \|q_{n_k} - p_{n_k}\|_2 + \|p_{n_k} - p\|_2 \longrightarrow 0.$$

Prandaj $q_{n_k} \to p$. Vazhdueshmëria e f në p jep $f(p_{n_k}) \to f(p)$ dhe $f(q_{n_k}) \to f(p)$, kundërshtim me diferencën që mbetet së paku ε_0. □

Shembull 9.3. Funksioni $f(x,y) = x^2 + y^2$ është uniformisht i vazhdueshëm në diskun e mbyllur $x^2 + y^2 \leq R^2$ për çdo $R > 0$, sepse është i vazhdueshëm dhe disku është kompakt. Në të gjithë $\mathbb{R}^2$ ai nuk është uniformisht i vazhdueshëm: për $p_n = (n, 0)$ dhe $q_n = (n + 1/n, 0)$ kemi $\|p_n - q_n\|_2 = 1/n \to 0$, por $|f(q_n) - f(p_n)| = 2 + 1/n^2 \not\to 0$.

10 Përgjithësimi nga dy në n ndryshore

Në $\mathbb{R}^n$ vendosim $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}$; përkufizimet e kufirit, kriteri me vargje, vazhdueshmëria dhe teorema Hajne–Kantor mbeten të vlefshme me të njëjtin arsyetim. Në dimension të fundmë përdorimi i normës maksimale

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le j\le n} |x_j|$$

është ekuivalent me normën euklidiane, sepse

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\,\|x\|_\infty.$$

Për rrjedhojë, ekzistenca e kufirit nuk varet nga zgjedhja ndërmjet këtyre normave. Pavarësisht normës së zgjedhur, prova duhet të kontrollojë të gjitha mënyrat e afrimit të pikës.

11 Tabela e metodave për analizën e kufirit

Metoda	**Çfarë provon**	**Kufizimi**
Dy trajektore	Mosekzistencën, nëse japin dy vlera të ndryshme	Nuk provon ekzistencën.
Vlerësimi uniform në normë	Ekzistencën e kufirit	Duhet të vlejë për çdo pikë afër qendrës.
Kriteri me vargje	Ekzistencë ose mosekzistencë	Kërkon respektimin e çdo vargu të lejuar.
Koordinata polare	Kufirin përmes një majoranti radial	Këndi i fiksuar nuk mjafton.

12 Gabime të zakonshme dhe përmbledhje operative

1. Gjetja e të njëjtit kufi përgjatë disa drejtëzave *nuk provon* kufirin e përgjithshëm.
2. Koordinatat polare nuk mjaftojnë pa kontrollin uniform ndaj θ.
3. Kufiri dhe vlera e funksionit në pikë janë koncepte të ndryshme.
4. Fusha e përcaktimit duhet të respektojë kushtet strikte të logaritmit dhe të emëruesit.
5. Vijat e nivelit janë në planin xy; grafiku është bashkësi në hapësirën xyz.

Procedurë e rekomanduar: përcaktoni D, identifikoni pikën e grumbullimit, provoni dy trajektore për të zbuluar një mosekzistencë, ose ndërtoni një vlerësim të njëtrajtshëm në normë për të vërtetuar ekzistencën, dhe më pas kontrolloni vazhdueshmërinë.

13 Detyra dhe bibliografi

Studioni fletoren shoqëruese me zgjidhje të plota dhe provoni të ndërtoni një funksion që jep kufirin zero përgjatë çdo drejtëze, por nuk ka kufi në origjinë. **Literatura orientuese:** T. Apostol, *Mathematical Analysis*, 2nd ed.; W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd ed.; M. Spivak, *Calculus on Manifolds*. Titujt origjinalë të veprave ruhen për identifikimin bibliografik.

ZGJERIM I KAPITULLIT 9

Funksionet me disa ndryshore: shpjegime dhe shembuj të zgjeruar

Prof. As. Dr. Siditë Duraj
Universiteti i Shkodrës "Luigj Gurakuqi"

Qëllimi i kapitullit të zgjeruar

Ky material plotëson leksionin bazë me argumentime që studentët mund t'i ndjekin në studim të pavarur: fusha e përcaktimit, topologjia elementare, kuantifikatorët e kufirit, trajektoret, koordinatat polare, vazhdueshmëria dhe kundërshembujt.

1 Fusha e përcaktimit dhe gjeometria e saj

Një funksion $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ merr një vlerë reale për çdo pikë $(x, y) \in D$. Fusha e përcaktimit nuk mund të trajtohet si detaj algjebrik: ajo ndikon në kuptimin e kufirit dhe të vazhdueshmërisë.

Shembull 1.1 (Ndërprerja e tri kushteve)**.** *Gjeni fushën e*

$$f(x, y) = \frac{\ln(4 - x^2 - y^2)}{\sqrt{y - x}}.$$

Hapi 1: *Logaritmi kërkon* $4 - x^2 - y^2 > 0$*, pra* $x^2 + y^2 < 4$*.*

Hapi 2: *Rrënja në emërues kërkon* $y - x > 0$ *(barazia me zero nuk lejohet).*

Hapi 3: *Bashkësia është*

$$\boxed{D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4,\ y > x\}}.$$

Ajo është pjesë e diskut të hapur me rreze 2*, sipër drejtëzës* $y = x$*, pa përfshirë kufirin rrethor dhe drejtëzën.*

2 Pikat e grumbullimit dhe përkufizimi i kufirit

Një pikë $a \in \mathbb{R}^2$ është pikë grumbullimi e D nëse çdo rreth i hapur me qendër a përmban një pikë të D të ndryshme nga a. Përkufizimi i kufirit është

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L \quad \Longleftrightarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall (x, y) \in D :$$
$$0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta \implies |f(x, y) - L| < \varepsilon.$$

Me rëndësi: δ mund të varet nga ε, por *nuk* mund të varet nga drejtimi apo trajektorja e afrimit.

Teoremë 2.1 (Uniciteti i kufirit)**.** *Nëse ekziston kufiri* $\lim_{z\to a} f(z)$*, ai është i vetëm.*

Vërtetim. Supozojmë se $L_1 \neq L_2$ janë dy kufij. Marrim $\varepsilon = |L_1 - L_2|/3$. Për z mjaft afër a në $D \setminus \{a\}$ vlejnë njëkohësisht $|f(z) - L_1| < \varepsilon$ dhe $|f(z) - L_2| < \varepsilon$. Prandaj $|L_1 - L_2| \leq |L_1 - f(z)| + |f(z) - L_2| < 2|L_1 - L_2|/3$, kundërshtim. □

3 Kriteri me vargje dhe përdorimi praktik

Teoremë 3.1 (Kriteri i Hajnesit)**.** *Le të jetë a pikë grumbullimi e D. Atëherë $\lim_{z\to a} f(z) = L$ nëse dhe vetëm nëse për çdo varg $z_n \in D \setminus \{a\}$ me $z_n \to a$ kemi $f(z_n) \to L$.*

Vërtetim. Në drejtimin e parë, për një $\varepsilon > 0$ zgjidhet δ nga përkufizimi i kufirit dhe për n mjaft të madh kemi $0 < \|z_n - a\| < \delta$, prandaj $|f(z_n) - L| < \varepsilon$.

Anasjelltas, nëse kufiri nuk është L, ekziston $\varepsilon_0 > 0$ e tillë që për çdo n mund të gjendet $z_n \in D$ me $0 < \|z_n - a\| < 1/n$ dhe $|f(z_n) - L| \geq \varepsilon_0$. Atëherë $z_n \to a$, por $f(z_n)$ nuk konvergjon drejt L, kundërshtim. □

Çfarë provon një trajektore?

Dy trajektore që japin dy kufij të ndryshëm provojnë mosekzistencën e kufirit. Edhe nëse të gjitha drejtëzat japin të njëjtën vlerë, kjo *nuk* provon ekzistencën e kufirit: mbeten trajektore jolineare.

4 Shembuj që dallojnë drejtëzat nga trajektoret

Shembull 4.1 (Dy drejtëza që japin vlera të ndryshme)**.** *Shqyrtojmë $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ për $(x,y) \neq (0,0)$. Për $y = mx$ dhe $x \neq 0$,*

$$f(x, mx) = \frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}.$$

Për $m = 0$ kufiri përgjatë drejtëzës është 0, ndërsa për $m = 1$ është $1/2$. Pra kufiri në origjinë nuk ekziston.

Shembull 4.2 (Të gjitha drejtëzat nuk mjaftojnë)**.** *Marrim $g(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ për $(x,y) \neq (0,0)$. Në drejtëzën $y = mx$ me $m \neq 0$,*

$$g(x, mx) = \frac{mx^3}{x^4 + m^2x^2} = \frac{mx}{x^2 + m^2} \longrightarrow 0.$$

Në $y = 0$ dhe $x = 0$ vlera është gjithashtu zero. Por përgjatë parabolës $y = x^2$ kemi

$$g(x, x^2) = \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2}, \quad x \neq 0.$$

Prandaj kufiri nuk ekziston, ndonëse përgjatë çdo drejtëze që kalon nga origjina kemi kufi zero.

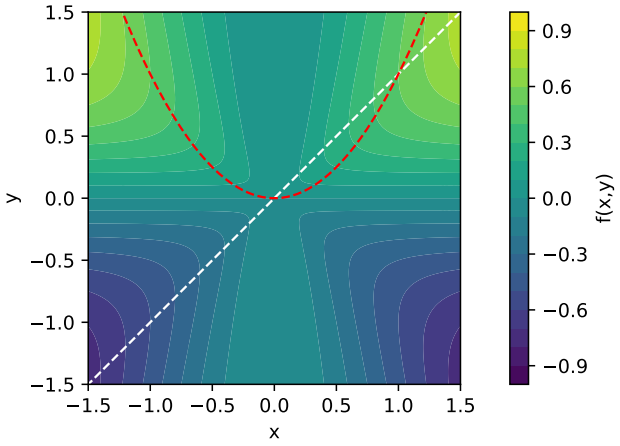


Figura 1. Shembull ilustrues i dy trajektoreve; përfundimi provohet nga formulat, jo vetëm nga pamja.

5 Si përdoren saktë koordinatat polare?

Afër origjinës, shkruajmë $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ dhe $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Për të provuar kufirin zero, një metodë e mjaftueshme është të gjejmë

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| \le \varphi(r), \qquad \varphi(r) \longrightarrow 0,$$

ku vlerësimi vlen për *të gjitha* këndet θ dhe për r të vogël.

Shembull 5.1 (Vlerësim uniform sipas këndit)**.** *Le të jetë* $h(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$ *kur* $(x,y) \neq 0$*, dhe* $h(0,0) = 0$*. Në koordinata polare,*

$$h(r\cos\theta, r\sin\theta) = r\cos^2\theta\sin\theta.$$

Meqë $|\cos^2\theta\sin\theta| \le 1$*, kemi* $|h(x,y)| \le r \to 0$*. Për çdo* $\varepsilon > 0$ *mjafton të marrim* $\delta = \varepsilon$*.*

Shembull 5.2 (Pse një faktor këndor i pakufizuar është problem)**.** *Te funksioni* $g(x,y) = x^2y/(x^4+y^2)$*, pas zëvendësimit polar shfaqet*

$$g(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r\cos^2\theta\sin\theta}{r^2\cos^4\theta + \sin^2\theta}.$$

Nuk kemi një kufi uniform të tipit Cr^p *me* $p > 0$*, sepse këndi mund të ndryshojë së bashku me* r*. Trajektorja* $y = x^2$ *e dëshmon pengesën.*

6 Shembull parametrik me klasifikim të plotë

Për $(x,y) \neq 0$ konsiderojmë

$$F_\alpha(x,y) = \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^\alpha}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Duke vendosur $x = r\cos\theta$ dhe $y = r\sin\theta$, marrim

$$F_\alpha(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^{3-2\alpha}\cos^2\theta\sin\theta.$$

Nëse $\alpha < 3/2$, moduli është jo më i madh se $r^{3-2\alpha} \to 0$; pra kufiri ekziston dhe është zero. Nëse $\alpha = 3/2$, varësia këndore nuk zhduket: për $\theta = 0$ vlera është zero, ndërsa për $\theta = \pi/4$ është një konstante jozero. Nëse $\alpha > 3/2$, përgjatë $\theta = \pi/4$ moduli rritet pa kufi. Rrjedhimisht, kufiri real i fundmë ekziston *saktësisht* për $\alpha < 3/2$.

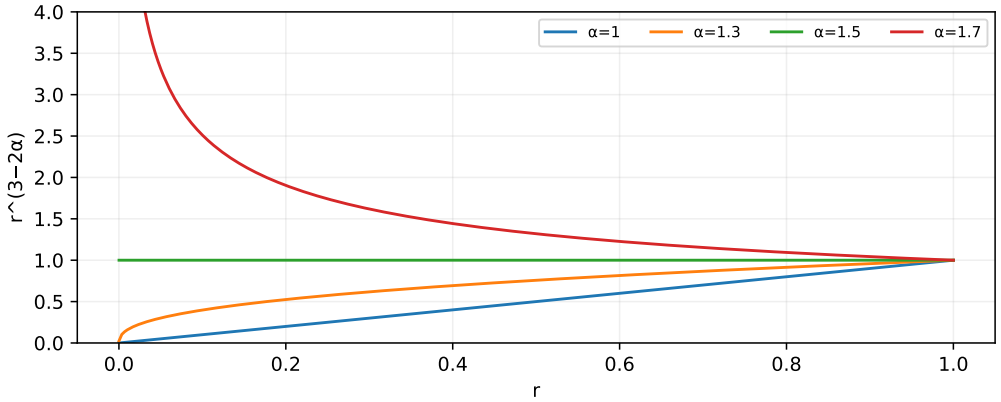


Figura 2. Faktori radial $r^{3-2\alpha}$; vetëm argumenti uniform sipas këndit jep provën.

7 Vazhdueshmëria dhe bashkësitë kompakte

Funksioni $f : D \to \mathbb{R}$ është i vazhdueshëm në $a \in D$ nëse $\lim_{z\to a,\ z\in D} f(z) = f(a)$. Në pikat e izoluara të D, vazhdueshmëria në topologjinë relative është automatike.

Teoremë 7.1 (Përbërja)**.** *Nëse $F : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ është i vazhdueshëm në a dhe $G : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ është i vazhdueshëm në $F(a)$, me $F(D) \subset E$, atëherë $G \circ F$ është i vazhdueshëm në a.*

Vërtetim. Nga vazhdueshmëria e G për $\varepsilon > 0$ marrim $\eta > 0$ të tillë që $\|u - F(a)\| < \eta$ sjell $\|G(u) - G(F(a))\| < \varepsilon$. Nga vazhdueshmëria e F për këtë η marrim $\delta > 0$ me $\|z - a\| < \delta \Rightarrow \|F(z) - F(a)\| < \eta$. Kombinimi jep pretendimin. □

Teoremë 7.2 (Heine–Cantor)**.** *Nëse $K \subset \mathbb{R}^n$ është kompakte dhe $f : K \to \mathbb{R}^m$ është e vazhdueshme, atëherë f është uniformisht e vazhdueshme në K.*

Vërtetim. Sikur pohimi të ishte i gabuar, ekziston $\varepsilon_0 > 0$ dhe vargje $x_j, y_j \in K$ me $\|x_j - y_j\| < 1/j$, por $\|f(x_j) - f(y_j)\| \geq \varepsilon_0$. Kompaktësia jep një nënvarg $x_{j_k} \to a \in K$; atëherë edhe $y_{j_k} \to a$. Vazhdueshmëria në a sjell që të dy vargjet e vlerave konvergjojnë te $f(a)$, kundërshtim. □

8 Detyra të punuara dhe gabime tipike

Shembull 8.1 (Kufiri që provohet me një pabarazi)**.** *Për $q(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq 0$, kemi*

$$0 \leq q(x,y) \leq \frac{(x^2+y^2)^2/4}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2}{4} \to 0,$$

ku përdorëm $4x^2y^2 \leq (x^2+y^2)^2$. Pra kufiri zero provohet pa trajektore.

Shembull 8.2 (Vazhdueshmëria e një zgjerimi)**.** *Le të jetë* $p(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ *për* $(x,y) \neq 0$ *dhe* $p(0,0) = 0$*. Me* $r = \sqrt{x^2+y^2}$*,*

$$|p(x,y)| = \frac{|x|y^2}{r^2} \leq |x| \leq r \to 0.$$

Kufiri është vlera e caktuar në origjinë, prandaj funksioni i zgjeruar është i vazhdueshëm atje.

Gabime për t'u shmangur

(1) Prova vetëm përgjatë drejtëzave nuk vërteton ekzistencën e kufirit. (2) Koordinatat polare japin provë vetëm kur vlerësimi është uniform ndaj θ. (3) Nuk lejohet të përdoret një formulë jashtë fushës së përcaktimit. (4) Për vazhdueshmërinë kërkohet jo vetëm ekzistenca e kufirit, por edhe barazia me vlerën e funksionit.

9 Sintezë për vetëkontroll

Për çdo problem: identifiko fushën D dhe pikën e grumbullimit; përcakto natyrën e pyetjes (ekzistencë apo mosekzistencë); përdor trajektore për të rrëzuar pretendimin; përdor vlerësime uniforme ose përkufizimin ε–δ për ta provuar; mbylle me një përfundim të saktë mbi kufirin ose vazhdueshmërinë. Ky udhëzues nuk e zëvendëson vërtetimin, por e organizon atë.