Analizë Matematike III — Fletore ushtrimesh 3

Vargjet funksionale: zgjidhje të argumentuara hap pas hapi

Prof. As. Dr. Siditë Duraj

Universiteti i Shkodrës “Luigj Gurakuqi” · CIKLI në Matematikë · 2026–2027

Udhëzim metodologjik

Çdo zgjidhje paraqet: **problemin**, **kufirin pikësor**, **testin e uniformitetit**, **vërtetimin** dhe **kontrollin e gabimit të mundshëm**. Supremumi duhet të merret në bashkësinë e saktë të përkufizimit; grafikët dhe eksperimentet numerike nuk zëvendësojnë argumentin.

Ushtrimi 1 — Një kufi i ndërprerë

Problemi. Studioni $f_n(x) = x^n$ në $[0,1]$.

Hapi 1 — Kufiri pikësor. Për $0 \le x < 1$ kemi $x^n \to 0$; në $x = 1$ kemi $x^n = 1$. Pra

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Hapi 2 — Supremumi i gabimit. Për çdo n,

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1)} x^n = 1.$$

Hapi 3 — Përfundimi. Konvergjenca është pikësore, jo uniforme. Kjo është në përputhje me teoremën që limiti uniform i funksioneve të vazhdueshme është i vazhdueshëm.

Kontroll kritik. Supremumi 1 në $[0,1)$ nuk është maksimum; fakti që nuk arrihet nuk e ndryshon normën.

Ushtrimi 2 — Ndryshimi i bashkësisë së përkufizimit

Problemi. Studioni $f_n(x) = x^n$ në $[0,a]$, $0 < a < 1$, dhe në $[0,1)$.

Hapi 1. Në të dyja bashkësitë kufiri pikësor është zero.

Hapi 2. Në $[0,a]$:

$$\sup_{x\in[0,a]} |x^n| = a^n \to 0.$$

Hapi 3. Në $[0,1)$:

$$\sup_{0\le x<1} |x^n| = 1 \quad \text{për çdo } n.$$

Përfundimi. Konvergjenca është uniforme në çdo $[0,a]$ të fiksuar brenda $[0,1)$, por jo uniforme në gjithë $[0,1)$.

Kontroll kritik. Uniformiteti lokal në çdo segment të brendshëm nuk nënkupton uniformitet global.

Ushtrimi 3 — Një maksimum që zvogëlohet

Problemi. Studioni $g_n(x) = x^n(1-x)$ në $[0,1]$ dhe gjeni kufirin më të mirë uniform.

Hapi 1. Për çdo $x \in [0,1]$, $g_n(x) \to 0$.

Hapi 2. Derivojmë për $n \ge 1$:

$$g_n'(x) = x^{n-1}[n-(n+1)x].$$

Hapi 3. Në skajet $g_n(0) = g_n(1) = 0$. Maksimumi arrihet në $x_n =$ $fracnn+1$:

$$M_n = g_n(x_n) = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

Hapi 4. Nga ($fracnn+1)^n \le 1$ kemi $M_n \le$ $frac1n+1 \to 0$.

Përfundimi. $g_n \to 0$ uniformisht. Formula e M_n është kufiri më i mirë i gabimit në normën uniforme.

Ushtrimi 4 — Kundërshembull me majë të ngushtë

Problemi. Studioni

$$h_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \qquad x \in [0,1].$$

Hapi 1. Në çdo $x > 0$ fiks, $h_n(x) \sim 1/(nx) \to 0$, ndërsa $h_n(0) = 0$. Kufiri pikësor është zero.

Hapi 2. Vendosim $t = nx$. Për $n \ge 1$, $t \in [0,n]$, kështu

$$h_n(x) = \frac{t}{1+t^2}, \qquad \frac{d}{dt}\frac{t}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}.$$

Hapi 3. Maksimumi në $[0,n]$ arrihet në $t=1$ dhe është $frac12$ (pika përkatëse $x =$ $frac1n$ i përket $[0,1]$).

Përfundimi. $\|h_n\|_\infty =$
$frac12$ për çdo n, prandaj nuk ka konvergjencë uniforme.

Kontroll kritik. Nëse shihen vetëm pika fikse të grafikut, maja që lëviz drejt zeros mund të mos vërehet.

Ushtrimi 5 — Kufizim uniform pa gjetur maksimumin

Problemi. Provoni se $f_n(x) =$
$fracsin(nx)n$ konvergjon uniformisht në $\mathbb{R}$.

Hapi 1. Për çdo x, $|f_n(x)| \leq$
$frac1n$.

Hapi 2. Prandaj $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| \leq$
$frac1n \to 0$.

Hapi 3. Për $x =$
$fracpi2n$ arrihet vlera
$frac1n$, pra supremumi është saktësisht
$frac1n$.

Përfundimi. Konvergjenca është uniforme në gjithë $\mathbb{R}$. Por $f_n'(0) = 1$ për çdo n, ndërsa derivati i limitit zero në 0 është zero.

Kontroll kritik. Teorema e derivimit nuk zbatohet, sepse derivatet $\cos(nx)$ nuk konvergojnë uniformisht.

Ushtrimi 6 — Një rast me parametër pozitiv

Problemi. Studioni $f_n(x) =$
$fracx1 + nx$ në $[0, 1]$.

Hapi 1. Për $x \in [0, 1]$, $f_n(x) \to 0$ (në $x = 0$ është identikisht zero).

Hapi 2. Për $n \geq 1$,

$$f_n'(x) = \frac{1}{(1 + nx)^2} > 0,$$

prandaj maksimumi është $f_n(1) =$
$frac1n + 1$.

Përfundimi. $f_n \to 0$ uniformisht në $[0, 1]$, me gabim maksimal ekzakt
$frac1n + 1$.

Kontroll kritik. Nuk mjafton vetëm kufiri i $f_n(x)$ për x të fiksuar; këtu është treguar një kufi i përbashkët.

Ushtrimi 7 — Teorema e integrimit dhe një llogaritje ekzakte

Problemi. Për $f_n(x) = x^n(1-x)$, $x \in [0, 1]$, verifikoni kalimin e limitit nën integral.

Hapi 1. Nga Ushtrimi 3 dimë se $f_n \to 0$ uniformisht.

Hapi 2. Integralët janë

$$\int_0^1 x^n(1-x)\,dx = \int_0^1 (x^n - x^{n+1})\,dx$$
$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Hapi 3. Kjo shprehje tenton në zero, njësoj si $\int_0^1 \lim_n f_n(x)\,dx = 0$.

Përfundimi. Llogaritja ekzakte konfirmon teoremën. Ajo nuk e zëvendëson nevojën për hipotezën e konvergjencës uniforme në formulimin e përgjithshëm.

Ushtrimi 8 — Kufiri uniform mund të mos jetë i derivueshëm

Problemi. Studioni $u_n(x) = \sqrt{x^2 + frac1n}$ në $[-1, 1]$.

Hapi 1. Kufiri pikësor është $u(x) = |x|$.

Hapi 2. Për çdo x:

$$0 \le \sqrt{x^2 + 1/n} - |x| = \frac{1/n}{\sqrt{x^2 + 1/n} + |x|} \le \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Hapi 3. Supremumi është pikërisht
$frac1sqrtn$, i arritur në $x = 0$; kështu konvergjenca është uniforme.

Përfundimi. Pavarësisht uniformitetit, kufiri $|x|$ nuk është i derivueshëm në zero. Nuk lejohet kalimi formal i derivatit në limit.

Ushtrimi 9 — Kriteri uniform i Koshit

Problemi. Vërtetoni pa njehsuar paraprakisht kufirin se $f_n(x) =$
$fracx1 + nx$ është varg uniformisht i Koshit në $[0, 1]$.

Hapi 1. Për $m, n \ge N$ dhe çdo $x \in [0, 1]$:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le |f_n(x)| + |f_m(x)|.$$

Hapi 2. Nga Ushtrimi 6 kemi $|f_k(x)| \le 1/(k+1)$, prandaj

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m+1} \le \frac{2}{N+1}.$$

Hapi 3. Për $\varepsilon > 0$ zgjedhim N me $2/(N+1) < \varepsilon$.

Përfundimi. Kushti i Koshit vlen në mënyrë uniforme; nga plotësia e $\mathbb{R}$, vargu konvergjon uniformisht.

Ushtrimi 10 — Një kundërshembull për kufirin e vazhdueshëm

Problemi. A vlen pohimi: “Nëse çdo f_n dhe kufiri pikësor f janë të vazhdueshëm në E, atëherë konvergjenca është uniforme”?

Hapi 1. Zgjedhim $E = [0, 1)$ dhe $f_n(x) = x^n$.

Hapi 2. Të gjitha f_n janë të vazhdueshme në E; kufiri pikësor $f = 0$ është gjithashtu i vazhdueshëm në E.

Hapi 3. Megjithatë $\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| = 1$ për çdo n.

Përfundimi. Pohimi është i pavërtetë. Vazhdimësia e kufirit është kusht i nevojshëm për kufijtë uniformë të funksioneve të vazhdueshme, por jo kusht i mjaftueshëm.

Pyetje reflektuese

1. Çfarë ndryshon në kuantifikatorët e dy përkufizimeve?
2. Pse duhet të dallojmë maksimumin nga supremumi?
3. Pse argumenti grafik nuk zëvendëson testin uniform?
4. Cilat hipoteza shtesë sigurojnë derivueshmërinë e kufirit?
5. Si përdoret kriteri uniform i Koshit kur kufiri f nuk dihet?

Autore: Prof. As. Dr. Siditë Duraj.

Ushtrimi 11 — Konvergjenca pikësore dhe integrali

Problemi. Për $n \geq 2$ konsideroni funksionin trekëndor

$$h_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 \leq x \leq 1/n, \\ 2n - n^2 x, & 1/n < x \leq 2/n, \\ 0, & 2/n < x \leq 1. \end{cases}$$

Hapi 1. Çdo h_n është i vazhdueshëm në segment sepse vlerat në pikat e bashkimit përputhen.

Hapi 2. Për $x = 0$ kemi $h_n(0) = 0$. Për $x > 0$ fiks, eventualisht $x >$ $frac2n$, prandaj $h_n(x) = 0$. Kështu $h_n \to 0$ pikësisht.

Hapi 3. Nga formula e sipërfaqes së trekëndëshit, $\int_0^1 h_n(x)\,dx =$ $frac12$ $cdot$ $frac2n$ $cdotn = 1$, për çdo $n \geq 2$.

Hapi 4. Supremumi i h_n është n, i arritur në $frac1n$; nuk ka konvergjencë uniforme.

Përfundimi. $\lim_n \int h_n = 1$ por $\int \lim_n h_n = 0$. Konvergjenca pikësore nuk justifikon ndërrimin e limitit me integralin.

Kontroll kritik. Mospërputhja nuk bie ndesh me teoremën e integrimit uniform, sepse hipoteza e saj mungon.