UNIVERSITETI I SHKODRËS “LUIGJ GURAKUQI”

Ushtrime të zgjidhura

Seritë funksionale dhe kriteret e konvergjencës

Autore: Prof. As. Dr. Siditë Duraj

CIKLI I | në Matematikë · 2026–2027

Çdo zgjidhje paraqet së pari objektin matematikor që studiohet, më pas kriterin e zgjedhur, vërtetimin dhe përfundimin. Kur përdoret një kriter i mjaftueshëm, dështimi i tij nuk interpretohet si provë divergjence.

Ushtrimi 1 — Seri me majorant të mbledhshëm

Problemi. Studioni konvergjencën e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ në $\mathbb{R}$ dhe jepni një kufi të gabimit.

Identifikimi. Vendosim $u_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^2}$. Për çdo $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(nx)| \le 1$.

Majoranti. $|u_n(x)| \le \dfrac{1}{n^2} = M_n$, pavarësisht nga x.

Konvergjenca. Meqë $\sum M_n$ konvergjon, kriteri M jep konvergjencë uniforme dhe absolute në të gjithë $\mathbb{R}$.

Gabimi. Për $N \ge 1$ dhe $S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n$:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |S(x) - S_N(x)| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \le \int_N^{\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{N}.$$

Përfundimi. Gabimi uniform është jo më i madh se $1/N$.

Ushtrimi 2 — Seria gjeometrike në dy fusha të ndryshme

Problemi. Krahasoni konvergjencën e $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ në $[0, r]$ $(0 < r < 1)$ dhe në $[0, 1)$.

Shuma. Për $0 \le x < 1$, $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$ dhe $S_N = (1 - x^{N+1})/(1-x)$.

Në $[0, r]$. Për çdo $x \le r$,

$$|S(x) - S_N(x)| = \frac{x^{N+1}}{1-x} \le \frac{r^{N+1}}{1-r} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

Kufiri është i pavarur nga x, ndaj konvergjenca është uniforme.

Në $[0,1)$. Për çdo N, $\sup_{0\le x<1} x^{N+1}/(1-x) = +\infty$, ndaj supremumi i gabimit nuk priret në zero.

Përfundimi. Uniforme në çdo $[0,r]$, por jo në $[0,1)$; kjo është konvergjencë uniforme lokale.

Ushtrimi 3 — Konvergjenca absolute pikësore nuk mjafton

Problemi. Studioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ në $E=(-1,1)$.

Pikësisht. Për çdo $|x|<1$, seria konvergjon absolutisht si seri gjeometrike.

Uniformiteti. Nëse seria konvergjonte uniformisht, kushti i domosdoshëm do të jepte $\sup_{x\in E}|x^n|\to 0$. Por për çdo n, $\sup_{|x|<1}|x|^n = 1$.

Përfundimi. Konvergjencë absolute në çdo pikë, por jo uniforme në $(-1,1)$.

Ushtrimi 4 — Seria alternuese uniforme pa kriterin M

Problemi. Studioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ në $[0,1]$.

Monotonia. Për $x\in[0,1]$, $b_n(x)=x^n/n$ është jonegativ dhe jobrritës ndaj n.

Mbetja. Nga vlerësimi i serive alternuese,

$$|S(x)-S_N(x)| \le \frac{x^{N+1}}{N+1} \le \frac{1}{N+1}.$$

Kjo është një vlerësim uniform, prandaj seria konvergjon uniformisht.

Kriteri M. $\sup_{[0,1]}|u_n| = 1/n$; nuk mund të zgjidhen majorantë të mbledhshëm që dominojnë të gjitha kufizat.

Përfundimi. Konvergjenca uniforme nuk kërkon domosdoshmërisht kriterin M. Në $x=1$ konvergjenca është kushtore.

Ushtrimi 5 — Seria teleskopike dhe dështimi i uniformitetit

Problemi. Studioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{n+1})$ në $[0,1]$.

Shumat e pjesshme. Duke thjeshtuar termat,

$$S_N(x) = x - x^{N+1}.$$

Kufiri pikësor. Për $0\le x<1$, $S(x)=x$. Në $x=1$, çdo kufizë është zero, prandaj $S(1)=0$.

Supremumi. Për $x<1$, $|S_N(x)-S(x)| = x^{N+1}$; rrjedhimisht $\sup_{[0,1]}|S_N-S| = 1$ për çdo N.

Përfundimi. Konvergjenca është pikësore, por jo uniforme. Edhe pse çdo S_N është i vazhdueshëm, kufiri është i pavazhdueshëm në $x = 1$.

Ushtrimi 6 — Kushti $u_n \to 0$ nuk është i mjaftueshëm

Problemi. Ndërtoni seri funksionale për të cilën $u_n \to 0$ uniformisht, por seria divergon për çdo x.

Ndërtimi. Merrni $E = [0, 1]$ dhe $u_n(x) = \dfrac{1}{n}$.

Uniformiteti. $\sup_{x\in E} |u_n(x)| = 1/n \to 0$.

Divergjenca. Për çdo $x \in E$ kemi $\sum u_n(x) = \sum 1/n$, seri harmonike divergjente.

Përfundimi. Një kusht i domosdoshëm nuk është automatikisht i mjaftueshëm.

Ushtrimi 7 — Kriteri uniform i Koshit i verifikuar drejtpërdrejt

Problemi. Vërtetoni uniformitetin e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{2^n}$ në $[-1, 1]$ pa përdorur kriterin M.

Bishti. Për $m > n$ dhe $|x| \le 1$,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} \frac{x}{2^k} \right| \le \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{2^k} \le \frac{1}{2^n}.$$

Koshi. Për çdo $\varepsilon > 0$ zgjedhim N_0 të tillë që $2^{-N_0} < \varepsilon$. Për $m > n \ge N_0$, bishti është më i vogël se ε për çdo x.

Përfundimi. Seria konvergjon uniformisht në $[-1, 1]$.

Ushtrimi 8 — Klasifikimi parametrik

Problemi. Në $E = [-1, 1]$, studioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$ sipas $p > 0$.

Për $p > 1$. $|x^n/n^p| \le 1/n^p$; seria p konvergjon, prandaj kemi konvergjencë uniforme dhe absolute.

Për $0 < p \le 1$. Në $x = 1$, seria bëhet $\sum 1/n^p$ dhe divergon. Pra nuk ka as konvergjencë pikësore në të gjithë E, e rrjedhimisht as uniforme.

Përfundimi. Në $[-1, 1]$ uniformiteti vlen pikërisht kur $p > 1$.

Ushtrimi 9 — Një seri konvergjente uniformisht me mbetje të kontrolluar

Problemi. Në $[0, 1]$, studioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(1-x)}{2^n}$.

Kufiri i termit. Për $x \in [0,1]$, $0 \le x(1-x) \le 1/4$.

Majoranti. $|u_n(x)| \le 1/(4 \cdot 2^n)$, një seri numerike e mbledhshme.

Gabimi. Për çdo N,

$$\sup_{[0,1]} |S - S_N| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{4 \cdot 2^n} = \frac{1}{4 \cdot 2^N}.$$

Përfundimi. Uniforme dhe absolute, me shkallë gabimi gjeometrike.

Ushtrimi 10 — Identifikoni gabimin logjik

Problemi. Një student pohon: "Meqë $\sum |u_n(x)|$ konvergjon për çdo x, kriteri M garanton uniformitetin." A është i saktë argumenti?

Analiza. Kriteri M kërkon një *varg të vetëm numerik* M_n të pavarur nga x, me $|u_n(x)| \le M_n$ dhe $\sum M_n < \infty$. Konvergjenca absolute për çdo x nuk ndërton një majorant të tillë.

Kundërshembulli. $u_n(x) = x^n$ në $(0,1)$: $\sum |u_n(x)|$ konvergjon për çdo x, por $\sup_{x \in (0,1)} |u_n(x)| = 1$.

Përfundimi. Argumenti është i pavlefshëm; uniformiteti nuk rrjedh nga konvergjenca absolute pikësore.

Shënim metodologjik. Për çdo seri përcaktoni saktësisht fushën E, argumentoni pavarësinë e N_0 nga x dhe dalloni një provë të mjaftueshme nga një karakterizim i nevojshëm e i mjaftueshëm.