UNIVERSITETI I SHKODRËS “LUIGJ GURAKUQI”
Fakulteti i Shkencave të Natyrës · Departamenti i Matematikës

Seritë e fuqive: fletore me ushtrime të zgjidhura

LEKSIONI 06 · 10 USHTRIME · 2026–2027

Autore: Prof. As. Dr. Siditë Duraj

Metoda e punës. Çdo ushtrim ka hapa të ndarë: identifikim të koeficientëve/qendrës, zgjedhje të kriterit, llogaritje, analizë të skajeve, kontroll të hipotezave dhe përfundim. Rezultati i një kriteri për rrezen nuk përcakton automatikisht skajet.

Përmbajtja

Ushtrimi 1 — Një skaj i përfshirë 2

Ushtrimi 2 — Dy skaje të përfshira 2

Ushtrimi 3 — Intervali me parametër 3

Ushtrimi 4 — Rrezja zero 3

Ushtrimi 5 — Rrezja e pafundme 4

Ushtrimi 6 — Fuqitë çift dhe kujdesi me koeficientët zero 4

Ushtrimi 7 — Derivim term pas termi 5

Ushtrimi 8 — Integrim term pas termi 5

Ushtrimi 9 — Vlerësim i garantuar i gabimit 6

Ushtrimi 10 — Një seri me koeficientë jo të zakonshëm 6

Ushtrimi 1 — Një skaj i përfshirë

Problemi. Gjeni bashkësinë e konvergjencës dhe llojin e konvergjencës për

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n}.$$

Hapi 1. Identifikimi.

Qendra është $c = 2$; koeficientët janë $a_n = \dfrac{1}{n}$.

Hapi 2. Rrezja.

Raporti i koeficientëve është

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1} \longrightarrow 1, \quad R = \frac{1}{1} = 1.$$

Hapi 3. Brendësia.

Në $|x-2| < 1$, pra $1 < x < 3$, seria konvergjon absolutisht nga kriteri i raportit.

Hapi 4. Skaji i majtë.

Për $x = 1$ marrim $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n$. Moduli $1/n$ ulet drejt zeros, prandaj seria konvergjon sipas Leibnizit; nuk konvergjon absolutisht, sepse $\sum 1/n$ divergon.

Hapi 5. Skaji i djathtë.

Për $x = 3$ merret $\sum 1/n$, që divergon si seri harmonike.

Përfundimi. $R = 1$, bashkësia është $\boxed{[1, 3)}$. Në brendësi konvergjenca është absolute; në $x = 1$ është kushtore.

Ushtrimi 2 — Dy skaje të përfshira

Problemi. Studioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n^2}$.

Hapi 1. Qendra dhe koeficientët.

$c = -1$, $a_n = \dfrac{1}{n^2}$.

Hapi 2. Rrezja.

$\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \dfrac{n^2}{(n+1)^2} \to 1$, prandaj $R = 1$.

Hapi 3. Zona e brendshme.

Nga $|x+1| < 1$ del $-2 < x < 0$ dhe konvergjencë absolute.

Hapi 4. Skajet.

Në $x = -2$, seria është $\sum (-1)^n/n^2$; në $x = 0$, $\sum 1/n^2$. Në të dyja rastet konvergjenca është absolute sepse seria p me $p = 2$ konvergjon.

Përfundimi. $\boxed{[-2,0]}$; konvergjencë absolute në çdo pikë të këtij segmenti.

Ushtrimi 3 — Intervali me parametër

Problemi. Për $p>0$ përcaktoni bashkësinë e konvergjencës së $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^p}$.

Hapi 1. Qendra.

$c=1$ dhe $a_n=1/n^p$.

Hapi 2. Rrezja.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p=1$, kështu $R=1$.

Hapi 3. Brendësia.

$0<x<2$: konvergjencë absolute.

Hapi 4. Në $x=0$.

Seria bëhet $\sum(-1)^n/n^p$; për $p>0$ termat $1/n^p$ ulen drejt zeros, prandaj konvergjon sipas Leibnizit. Ajo është absolute vetëm për $p>1$.

Hapi 5. Në $x=2$.

Seria është $\sum 1/n^p$, konvergjente saktësisht kur $p>1$.

Përfundimi. $\boxed{[0,2)}$ kur $0<p\le 1$ dhe $\boxed{[0,2]}$ kur $p>1$.

Ushtrimi 4 — Rrezja zero

Problemi. Studioni $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}n!(x-3)^n$.

Hapi 1. Qendra.

$c=3$, $a_n=n!$.

Hapi 2. Raporti.

Për $x\neq 3$:

$$\left|\frac{(n+1)!(x-3)^{n+1}}{n!(x-3)^n}\right|=(n+1)|x-3|\to+\infty.$$

Hapi 3. Divergjenca.

Për $x\neq 3$, termat nuk priren në zero (raporti eventualisht është mbi dy), kështu seria divergon.

Hapi 4. Qendra.

Në $x=3$ kemi vetëm kufizën $n=0$ të barabartë me 1; të tjerat janë zero.

Përfundimi. $\boxed{R = 0}$ dhe bashkësia e konvergjencës është $\boxed{\{3\}}$.

Ushtrimi 5 — Rrezja e pafundme

Problemi. Studioni $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$.

Hapi 1. Koeficientët.

Në formën $\sum a_n x^n$, $a_n = 2^n/n!$.

Hapi 2. Raporti.

Për $x \neq 0$:

$$\left|\frac{(2x)^{n+1}/(n+1)!}{(2x)^n/n!}\right| = \frac{|2x|}{n+1} \longrightarrow 0.$$

Hapi 3. Interpretimi.

Kriteri i raportit jep konvergjencë absolute për çdo $x \in \mathbb{R}$. Në $x = 0$ konvergjenca është e menjëhershme.

Hapi 4. Shuma.

Nga seria eksponenciale kemi $S(x) = e^{2x}$, ku ky identitet mund të merret si zhvillim i njohur i funksionit eksponencial.

Përfundimi. $\boxed{R = +\infty}$ dhe bashkësia e konvergjencës është $\boxed{\mathbb{R}}$.

Ushtrimi 6 — Fuqitë çift dhe kujdesi me koeficientët zero

Problemi. Studioni $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{4^n}$.

Hapi 1. Rishkrimi.

Shkruajmë

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{4}\right)^n,$$

që është seri gjeometrike me raport $q = x^2/4$.

Hapi 2. Konvergjenca.

Kërkohet $|q| < 1$, pra $x^2 < 4$ ose $|x| < 2$.

Hapi 3. Skajet.

Për $x = \pm 2$ kemi $q = 1$ dhe shuma $1 + 1 + \cdots$ divergon.

Hapi 4. Kontrolli i rrezes.

Si seri në x, koeficientët e fuqive teke janë zero; formula e raportit a_{k+1}/a_k nuk zbatohet në mënyrë të drejtpërdrejtë. Formula Cauchy–Hadamard jep gjithashtu $R = 2$.

Përfundimi. $\boxed{(-2,2)}$ dhe $\boxed{R=2}$.

Ushtrimi 7 — Derivim term pas termi

Problemi. Duke nisur nga seria gjeometrike, gjeni një seri për $\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

Hapi 1. Identiteti fillestar.

Për $|x|<1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Hapi 2. Kontrolli i hipotezave.

Seria ka rreze $R=1$; brenda $(-1,1)$ derivimi term pas termi lejohet.

Hapi 3. Derivimi.

Diferencojmë:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Hapi 4. Rindeksimi.

Me $k=n-1$ marrim $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k = 1/(1-x)^2$.

Hapi 5. Rrezja dhe skajet.

Derivimi ruan rrezen një. Në $x=1$ termat n nuk priren në zero; në $x=-1$ termat $n(-1)^{n-1}$ nuk priren në zero.

Përfundimi. $\boxed{\dfrac{1}{(1-x)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n}$ për $\boxed{|x|<1}$.

Ushtrimi 8 — Integrim term pas termi

Problemi. Zhvilloni $\ln(1+x)$ në seri fuqish dhe përcaktoni skajet.

Hapi 1. Seria bazë.

Për $|t|<1$:

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n.$$

Hapi 2. Lejueshmëria e integrimit.

Për çdo $x \in (-1,1)$, integrimi në segmentin ndërmjet 0 dhe x është i lejuar nga konvergjenca uniforme në segmente të brendshme.

Hapi 3. Integrimi.

Marrim

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n\,dt,$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}.$$

Hapi 4. Rrezja.

Koeficientët e zhvendosur kanë normë asimptotike rrënjë një: $R = 1$.

Hapi 5. Skajet.

Në $x = 1$, seria alternuese harmonike konvergjon; në $x = -1$, të gjithë termat janë $-1/(n+1)$ dhe seria divergon.

Përfundimi. Bashkësia e konvergjencës së serisë është $\boxed{(-1, 1]}$; identiteti me $\ln(1+x)$ vlen në $(-1, 1)$ dhe shtrihet te $x = 1$ me teoremën e Abelit.

Ushtrimi 9 — Vlerësim i garantuar i gabimit

Problemi. Gjeni N të tillë që shuma $S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} x^n$ të përafrojë $1/(1-x)$ me gabim jo më të madh se 10^{-5} në $|x| \le 1/2$.

Hapi 1. Mbetja ekzakte.

Nga formula e shumës gjeometrike,

$$R_N(x) = \frac{x^{N+1}}{1-x}.$$

Hapi 2. Kufiri uniform.

Për $|x| \le 1/2$,

$$|R_N(x)| \le \frac{(1/2)^{N+1}}{1 - 1/2} = 2^{-N}.$$

Hapi 3. Kushti i saktësisë.

Kërkojmë $2^{-N} \le 10^{-5}$, ekuivalent me $2^N \ge 100000$.

Hapi 4. Zgjedhja minimale nga ky vlerësim.

$2^{16} = 65536 < 100000$ dhe $2^{17} = 131072 \ge 100000$; pra $N = 17$ garanton saktësinë e kërkuar.

Përfundimi. $\boxed{N = 17}$, me indeksim $n = 0, \dots, N$ (pra 18 kufiza).

Ushtrimi 10 — Një seri me koeficientë jo të zakonshëm

Problemi. Studioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 (x-1)^n}{3^n}$.

Hapi 1. Qendra dhe koeficientët.

$c = 1$ dhe $a_n = n^2/3^n$.

Hapi 2. Raporti i koeficientëve.

Kemi

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2}{3n^2} \longrightarrow \frac{1}{3}, \qquad R = 3.$$

Hapi 3. Konvergjenca e brendshme.

$|x-1| < 3 \iff -2 < x < 4$; këtu konvergjon absolutisht.

Hapi 4. Skaji $x = 4$.

Termi i përgjithshëm është n^2; nuk priret në zero, prandaj divergon.

Hapi 5. Skaji $x = -2$.

Termi është $(-1)^n n^2$; përsëri nuk priret në zero, prandaj divergon.

Përfundimi. $\boxed{R = 3}$ dhe bashkësia e konvergjencës është $\boxed{(-2, 4)}$.

Kontrolli metodologjik para dorëzimit

1. Identifikova drejt qendrën dhe koeficientët?
2. E përdora kriterin e raportit vetëm kur kufizat e tij janë të përkufizuara?
3. I kontrollova të dy skajet veçmas?
4. Dallova konvergjencën absolute nga ajo kushtore?
5. Për derivimin dhe integrimin deklarova intervalin ku lejohet veprimi?
6. Për përafrimet tregova një *kufi rigoroz* të gabimit?