UNIVERSITETI I SHKODRËS “LUIGJ GURAKUQI”
FAKULTETI I SHKENCAVE TË NATYRËS — DEPARTAMENTI I MATEMATIKËS

ANALIZË MATEMATIKE III

Leksioni 7: Seritë e Taylor-it dhe aplikimet

Fletore akademike me 12 ushtrime të zgjidhura

Autore: Prof. As. Dr. Siditë Duraj

Programi i ciklit të parë në Matematikë — Viti akademik 2026–2027

Metoda e punës. Çdo ushtrim trajtohet sipas kësaj skeme: të dhënat dhe qëllimi; zgjedhja e teoremës; verifikimi i hipotezave; njehsimi me hapa; vlerësimi i gabimit kur kërkohet; përfundimi dhe kontrolli kritik. Në çdo rast, grafiku mund të shërbejë si ilustrim, jo si vërtetim.

Përmbajtja tematike. Polinome Maclaurin dhe Taylor; formulat e mbetjes; vlerësime uniforme; seri fuqish; kufijtë e vlefshmërisë; kundërshembull ndaj analiticitetit; përafrime numerike të certifikuara. **Konventa.** Shënojmë me

$T_{n,a}$ polinomin e Taylor-it të rendit n të funksionit f rreth qendrës a dhe me $R_{n,a}(x) = f(x) - T_{n,a}(x)$ mbetjen. Kufijtë e formës së Lagranzhit zbatohen vetëm pasi kontrollohen kushtet e derivueshmërisë në segmentin përkatës.

Ushtrimi 1 — Përafrimi i funksionit eksponencial

Gjeni $T_{4,0}$ për $f(x) = e^x$, njehsoni $T_{4,0}(\frac{1}{2})$ dhe jepni një kufi të provuar të gabimit.

Hapi 1 — Derivatet dhe qendra.

Për çdo $k \geq 0$ kemi $f^{(k)}(x) = e^x$. Prandaj $f^{(k)}(0) = 1$.

Hapi 2 — Ndërtimi i polinomit.

Sipas përkufizimit,

$$T_{4,0}(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}.$$

Hapi 3 — Njehsimi i vlerës së përafërt.

$$T_{4,0}\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{384} = \frac{633}{384} = 1.6484375.$$

Hapi 4 — Hipotezat për mbetjen.

Funksioni e^x ka pesë derivate të vazhdueshme në $[0, \frac{1}{2}]$. Për çdo t në këtë segment, $|f^{(5)}(t)| = e^t \leq e^{1/2}$.

Hapi 5 — Vlerësimi rigoroz.

Formula e Lagranzhit jep

$$\left| e^{1/2} - \frac{633}{384} \right| \leq \frac{e^{1/2}}{5!} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{e^{1/2}}{3840} < 0.000430.$$

Përfundim. Përafrimi është $\dfrac{633}{384}$, me gabim absolut më të vogël se 0.000430.

Kontroll kritik. Kufiri i gabimit nuk është gabimi real; ai është një garanci teorike.

Ushtrimi 2 — Sinusi dhe mbetja e Maclaurin-it

Gjeni polinomin Maclaurin të rendit 5 për $\sin x$ dhe provoni një vlerësim uniform në $[-1,1]$.

Hapi 1 — Cikli i derivateve.

Derivatet janë $\sin x, \cos x, -\sin x, -\cos x, \ldots$. Në origjinë termat e shkallëve çift zhduken.

Hapi 2 — Polinomi.

$$T_{5,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

Hapi 3 — Kushtet e teoremës.

Funksioni është C^6 në çdo segment që bashkon 0 me $x \in [-1,1]$; derivati i gjashtë është $-\sin t$, me $|f^{(6)}(t)| \le 1$.

Hapi 4 — Mbetja.

$$|R_{5,0}(x)| \le \frac{|x|^6}{6!} \le \frac{1}{720} \quad (|x| \le 1).$$

Përfundim. Për çdo $|x| \le 1$,

$$\left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)\right| \le \frac{1}{720}.$$

Kontroll kritik. Ky kufi është i sigurt, por jo domosdoshmërisht optimal; derivati i gjashtë mund të vlerësohet më mprehtësisht në segmente më të vogla.

Ushtrimi 3 — Zhvillimi i logaritmit

Ndërtoni $T_{3,0}$ për $\ln(1+x)$ dhe përcaktoni intervalin e vlefshmërisë së serisë së tij Maclaurin.

Hapi 1 — Fusha dhe derivatet.

Për $x > -1$ kemi $f'(x) = (1+x)^{-1}$. Me induksion,

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}, \qquad k \geq 1.$$

Hapi 2 — Koeficientët në zero.

Duke zëvendësuar $x = 0$, fitojmë $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$.

Hapi 3 — Polinomi i rendit tre.

$$T_{3,0}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Hapi 4 — Seria e plotë.

Për $|x| < 1$, nga seria gjeometrike dhe integrimi uniform në $[-r, r]$, $0 < r < 1$, rezulton

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}.$$

Hapi 5 — Skajet.

Për $x = 1$ përdorim Leibniz-in dhe teoremën e Abelit për të marrë shumën $\ln 2$; për $x = -1$ seria është $-\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ dhe divergon.

Përfundim. Seria Maclaurin përfaqëson $\ln(1+x)$ në intervalin $(-1, 1]$.

Kontroll kritik. Intervali i konvergjencës së serisë së pafundme nuk është hipotezë që duhet marrë si e mirëqenë vetëm nga forma e polinomit të fundmë.

Ushtrimi 4 — Një funksion i lëmuar që nuk është analitik

Për $g(x) = e^{-1/x^2}$ kur $x \neq 0$ dhe $g(0) = 0$, provoni se $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, por seria Taylor në zero nuk përfaqëson g në asnjë interval rreth zeros.

Hapi 1 — Shuarja e fuqive.

Për çdo $m \geq 0$,

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{|x|^m} = 0.$$

Vërtet, duke vendosur $t = 1/|x| \to \infty$, shprehja bëhet $t^m e^{-t^2} \to 0$.

Hapi 2 — Forma e derivateve jashtë zeros.

Me induksion sipas k, për $x \neq 0$,

$$g^{(k)}(x) = P_k\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2},$$

ku P_k është polinom; baza $P_0 = 1$, ndërsa rregulli i derivimit jep sërish një polinom në $1/x$.

Hapi 3 — Derivimi në origjinë.

Supozojmë $g^{(k)}(0) = 0$. Atëherë

$$g^{(k+1)}(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g^{(k)}(h) - g^{(k)}(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{P_k(1/h) e^{-1/h^2}}{h} = 0,$$

nga Hapi 1, sepse polinomi dhe faktori $1/h$ kanë rritje vetëm polinomiale.

Hapi 4 — Vazhdueshmëria e derivateve.

E njëjta shuarje tregon se $g^{(k)}(x) \to 0 = g^{(k)}(0)$ kur $x \to 0$. Kështu të gjitha derivatet janë të vazhdueshme.

Hapi 5 — Seria Taylor.

Për çdo k, $g^{(k)}(0) = 0$, prandaj seria Taylor është identikisht zero.

Përfundim. Funksioni është C^∞, por $g(x) > 0$ për $x \neq 0$; rrjedhimisht nuk është analitik në origjinë.

Kontroll kritik. Ekzistenca e të gjitha derivateve nuk garanton barazinë e funksionit me serinë Taylor.

Ushtrimi 5 — Përafrimi i kosinusit me rend të ulët

Përafroni $\cos x$ me $1 - \dfrac{x^2}{2}$ dhe provoni një kufi të gabimit për $|x| \le 1$.

Hapi 1 — Zgjedhja e rendit.

Polinomi Maclaurin i rendit 3 është $T_{3,0}(x) = 1 - x^2/2$ sepse koeficienti kubik është zero.

Hapi 2 — Derivati kontrollues.

$f^{(4)}(t) = \cos t$, ndaj $|f^{(4)}(t)| \le 1$ në $[-1, 1]$.

Hapi 3 — Mbetja e Lagranzhit.

Për çdo $|x| \le 1$ ekziston ξ ndërmjet 0 dhe x i tillë që

$$\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = \frac{\cos \xi}{4!} x^4.$$

Hapi 4 — Vlerësimi i modulit.

$$\left|\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}\right| \le \frac{|x|^4}{24} \le \frac{1}{24}.$$

Përfundim. Gabimi është jo më i madh se $1/24$ në të gjithë segmentin e deklaruar.

Kontroll kritik. Përdorimi i rendit 3 është i qëllimshëm: koeficienti kubik është zero, por kjo lejon një mbetje të rendit të katërt.

Ushtrimi 6 — Zhvillimi rreth një pike të ndryshme nga zero

Përafroni $\ln(1.2)$ me polinomin Taylor të rendit 2 të $f(x) = \ln x$ rreth $a = 1$ dhe kontrolloni gabimin.

Hapi 1 — Kushtet.

Funksioni $\ln x$ është C^3 në $[1, 1.2]$.

Hapi 2 — Derivatet në qendër.

$f(1) = 0$, $f'(1) = 1$, $f''(1) = -1$.

Hapi 3 — Polinomi.

$$T_{2,1}(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2}.$$

Hapi 4 — Vlera e përafërt.

Për $x = 1.2$,

$$T_{2,1}(1.2) = \frac{1}{5} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{9}{50} = 0.18.$$

Hapi 5 — Derivati i tretë.

$f'''(t) = 2/t^3$ dhe $|f'''(t)| \le 2$ në $[1, 1.2]$.

Hapi 6 — Mbetja.

$$\left|\ln(1.2) - \frac{9}{50}\right| \le \frac{2}{3!}\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{375}.$$

Përfundim. Përafrimi 0.18 ka gabim absolut jo më të madh se $1/375 \approx 0.002667$.

Kontroll kritik. Ky është kufi rigoroz dhe jo diferenca reale midis logaritmit dhe përafrimit.

Ushtrimi 7 — Përcaktimi i rendit nga toleranca

Gjeni një rend të polinomit Maclaurin për e^x që garanton $|R_n(x)| < 10^{-4}$ për të gjithë $x \in [-1, 1]$.

Hapi 1 — Kriteri i mbetjes.

$f^{(n+1)}(t) = e^t$, prandaj $|f^{(n+1)}(t)| \le e$ në $[-1, 1]$.

Hapi 2 — Vlerësimi uniform.

Formula e Lagranzhit jep

$$\sup_{|x|\le 1} |R_n(x)| \le \frac{e}{(n+1)!}.$$

Hapi 3 — Zgjedhja e rendit.

Për $n = 7$,

$$\frac{e}{8!} < \frac{2.72}{40320} < 6.75 \cdot 10^{-5} < 10^{-4}.$$

Hapi 4 — Përcaktimi i polinomit.

Përdorim $T_{7,0}(x) = \sum_{k=0}^{7} x^k/k!$.

Përfundim. Rendi $n = 7$ garanton saktësinë e kërkuar në të gjithë $[-1, 1]$.

Kontroll kritik. Nuk po pretendojmë se është rendi minimal sipas të gjitha metodave të mundshme të vlerësimit.

Ushtrimi 8 — Integrimi term pas termi dhe logaritmi

Nxirrni zhvillimin e $\ln(1+x)$ nga seria gjeometrike, duke justifikuar integrimin term pas termi.

Hapi 1 — Identiteti fillestar.

Për $|t|<1$,

$$\frac{1}{1+t}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n.$$

Hapi 2 — Konvergjenca uniforme lokale.

Për $|t|\le r<1$, $|(-1)^n t^n|\le r^n$ dhe seria $\sum r^n$ konvergjon; kriteri i Vajershtrasit jep konvergjencë uniforme.

Hapi 3 — Integrimi i lejueshëm.

Për $|x|<r<1$, integrimi në segmentin ndërmjet 0 dhe x jep

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^n\,dt.$$

Hapi 4 — Njehsimi.

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}.$$

Hapi 5 — Konstanta dhe skajet.

Të dy anët janë zero për $x=0$. Në $x=1$ seria konvergjon sipas Leibniz-it dhe ka shumën $\ln 2$ nga teorema e Abelit; në $x=-1$ divergon.

Përfundim. Identiteti është i vlefshëm për $-1<x\le 1$.

Kontroll kritik. Integrimi u justifikua në çdo segment të mbyllur brenda $(-1,1)$; skaji $x=1$ kërkoi argument të veçantë.

Ushtrimi 9 — Vlerësim uniform për polinomin e rendit pesë

Jepni një kufi të gabimit të $T_{5,0}$ për e^x në intervalin $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Hapi 1 — Objektivi.

Kërkohet $\sup_{|x|\le 1/2} |e^x - T_{5,0}(x)|$, jo gabimi në një pikë.

Hapi 2 — Hipotezat.

e^x është C^6 në segment dhe $|f^{(6)}(t)| = e^t \le e^{1/2}$.

Hapi 3 — Mbetja.

Për $|x| \le 1/2$,

$$|R_{5,0}(x)| \le \frac{e^{1/2}|x|^6}{6!}.$$

Hapi 4 — Kalimi në supremum.

$$\sup_{|x|\le 1/2} |R_{5,0}(x)| \le \frac{e^{1/2}}{6!\,2^6} = \frac{e^{1/2}}{46080} < 3.58 \cdot 10^{-5}.$$

Përfundim. Gabimi uniform i përafrimit është më i vogël se $3.58 \cdot 10^{-5}$.

Kontroll kritik. Një grafik mund të sugjerojë saktësi, por vetëm ky vlerësim ofron garanci në të gjithë intervalin.

Ushtrimi 10 — Polinomi i kosinusit të rendit gjashtë

Gjeni $T_{6,0}$ për $\cos x$ dhe një kufi të gabimit për $|x| \le 1$.

Hapi 1 — Derivatet.

$f^{(2k)}(0) = (-1)^k$ dhe $f^{(2k+1)}(0) = 0$.

Hapi 2 — Ndërtimi.

$$T_{6,0}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}.$$

Hapi 3 — Përzgjedhja e mbetjes.

$f^{(7)}(t) = \sin t$, ndaj $|f^{(7)}(t)| \le 1$ për $|t| \le 1$.

Hapi 4 — Zbatimi i Lagranzhit.

$$|\cos x - T_{6,0}(x)| \le \frac{|x|^7}{7!} \le \frac{1}{5040}.$$

Përfundim. Për $|x| \le 1$, gabimi është jo më i madh se $1/5040$.

Kontroll kritik. Ekziston edhe një vlerësim i rendit të tetë, më i mprehtë, duke përdorur zhdukjen e derivatit të shtatë në origjinë.

Ushtrimi 11 — Problem i ri: përafrimi i rrënjës katrore

Përafroni $\sqrt{4.2}$ me polinomin Taylor të rendit 2 të $f(x)=\sqrt{x}$ rreth $a=4$ dhe provoni një kufi të gabimit.

Hapi 1 — Derivatet.

Për $x>0$,

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad f''(x)=-\frac{1}{4x^{3/2}}, \qquad f'''(x)=\frac{3}{8x^{5/2}}.$$

Hapi 2 — Vlerat në qendër.

$f(4)=2$, $f'(4)=1/4$ dhe $f''(4)=-1/32$.

Hapi 3 — Polinomi.

$$T_{2,4}(x)=2+\frac{x-4}{4}-\frac{(x-4)^2}{64}.$$

Hapi 4 — Njehsimi për $x=4.2$.

Me $h=1/5$,

$$T_{2,4}(4.2)=2+\frac{1}{20}-\frac{1}{1600}=2.049375.$$

Hapi 5 — Kontrolli i mbetjes.

Në $[4,4.2]$, $|f'''(t)|\le 3/(8\cdot 4^{5/2})=3/256$.

Hapi 6 — Vlerësimi i gabimit.

$$\left|\sqrt{4.2}-2.049375\right|\le \frac{3}{256}\frac{(1/5)^3}{3!}=\frac{1}{64000}=0.000015625.$$

Përfundim. Përafrimi 2.049375 ka gabim absolut jo më të madh se $1.5625\cdot 10^{-5}$.

Kontroll kritik. Ky problem është i ndryshëm nga ushtrimi i logaritmit: teston derivatet e fuqisë fraksionare dhe një vlerësim të mprehtë lokal.

Ushtrimi 12 — Kufijtë e vlefshmërisë së serisë së logaritmit

Diskutoni konvergjencën e serisë $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ dhe përcaktoni shumën e saj kur konvergjon.

Hapi 1 — Rrezja.

Për koeficientët $a_n=(-1)^{n+1}/n$, formula Cauchy–Hadamard jep

$$\frac{1}{R}=\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/n}=1,\qquad R=1.$$

Hapi 2 — Pjesa e brendshme.

Për $|x|<1$ integrimi i serisë gjeometrike jep shumën $\ln(1+x)$.

Hapi 3 — Skaji i djathtë.

Në $x=1$ kemi $\sum_{n\ge1}(-1)^{n+1}/n$, që konvergjon sipas Leibniz-it. Sipas teoremës së Abelit, shuma është $\lim_{r\uparrow1}\ln(1+r)=\ln 2$.

Hapi 4 — Skaji i majtë.

Në $x=-1$, çdo term bëhet $-1/n$; seria është negative e serisë harmonike dhe divergon.

Hapi 5 — Konvergjenca absolute në skaj.

Në $x=1$ seria e moduleve është harmonike dhe divergon, prandaj konvergjenca është kushtore.

Përfundim. Intervali i konvergjencës është $(-1,1]$ dhe shuma është $\ln(1+x)$ në këtë interval.

Kontroll kritik. Rrezja $R=1$ nuk përcakton vetë përfshirjen e pikave skajore; secila u analizua veçmas.

Listë kontrolli për studentin

Përpara se të pranoni një zgjidhje me Taylor-in, verifikoni: (i) qendrën a dhe rendin n; (ii) vlerat e derivateve në a; (iii) intervalin ku ekzistojnë derivatet e kërkuara; (iv) vlerën M që kontrollon modulin e derivatit; (v) zbatimin e formulës së mbetjes; (vi) dallimin mes gabimit real dhe kufirit të tij; (vii) kur bëhet fjalë për seri të pafundme, intervalin e konvergjencës dhe skajet e tij.

Parim metodologjik. Një afrim numerik nuk është i certifikuar vetëm sepse shifrat duken të sakta. Certifikimi kërkon kontroll matematikor të mbetjes, me hipotezat e teoremës të verifikuara.