ANALIZË MATEMATIKE III • FLETORE AKADEMIKE

Leksioni 8: ushtrime të zgjidhura

Seritë e Fourier-it dhe zbatimet

Autore: Prof. As. Dr. Siditë Duraj
Universiteti i Shkodrës "Luigj Gurakuqi"
Fakulteti i Shkencave të Natyrës, Departamenti i Matematikës

Metoda e punës. Çdo zgjidhje përfshin hipotezat, strategjinë, kalimet algjebrike, rezultatin dhe një kontroll kritik. Funksionet në ushtrimet 1–8 vazhdohen 2π-periodikisht, përveç kur thuhet ndryshe.

Ushtrimi 1 — Seria e Fourier-it e funksionit sharrë

Problemi. Për $f(x) = x$, $-\pi < x < \pi$, gjeni koeficientët dhe vlerat e shumës së serisë në $x = 0$ e $x = \pi$.

Hapi 1. Simetria. Meqë $f(-x) = -f(x)$, të gjithë koeficientët e kosinusit zhduken: $a_0 = a_n = 0$.

Hapi 2. Koeficientët. Nga përkufizimi

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(nx)\,dx.$$

Hapi 3. Integrimi sipas pjesëve. Me $u = x$ dhe $dv = \sin(nx)dx$,

$$\int x\sin(nx)dx = -\frac{x\cos(nx)}{n} + \frac{\sin(nx)}{n^2}.$$

Hapi 4. Vlerësimi në skaje. Kështu

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos(nx)}{n} + \frac{\sin(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

Hapi 5. Shuma dhe skajet.

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx), \qquad -\pi < x < \pi.$$

Në $x = 0$, shuma është zero; në $x = \pi$ gjithashtu zero, sepse dy kufijtë periodikë janë $-\pi$ dhe π dhe mesatarja është zero.

Kontroll kritik. Barazia $x = \sum\cdots$ nuk shtrihet në $x = \pi$; vlera e vetë funksionit në një kërcim nuk përcakton shumën e serisë.

Ushtrimi 2 — Funksioni $|x|$ dhe koeficientët që bien si $1/n^2$

Problemi. Gjeni serinë e Fourier-it të $f(x) = |x|$ në $[-\pi, \pi]$.

Hapi 1. Funksioni është çift; prandaj $b_n = 0$.

Hapi 2. Termi konstant:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \pi, \qquad \frac{a_0}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Hapi 3. Për $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx)\, dx.$$

Hapi 4. Me integrim sipas pjesëve,

$$\int x \cos(nx)\, dx = \frac{x \sin(nx)}{n} + \frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

Hapi 5. Për rrjedhojë,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} = \begin{cases} 0, & n \text{ çift}, \\ -\dfrac{4}{\pi n^2}, & n \text{ tek}. \end{cases}$$

Hapi 6. Përfundimi:

$$\boxed{|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}}$$

Seria konvergjon uniformisht dhe absolutisht nga kriteri majorant $\sum n^{-2}$.

Kontroll kritik. Konvergjenca uniforme mund të vërtetohet drejtpërdrejt pa teoremë të përgjithshme për konvergjencën pikësore.

Ushtrimi 3 — Vala katrore dhe pikat e kërcimit

Problemi. Le të jetë $f(x) = -1$ për $-\pi < x < 0$, $f(x) = 1$ për $0 < x < \pi$. Gjeni serinë dhe shumën në $x = 0$.

Hapi 1. Funksioni është tek: $a_0 = a_n = 0$.

Hapi 2. Nga simetria,

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx)\, dx = \frac{2}{\pi n}(1 - (-1)^n).$$

Hapi 3. Për n çift kemi $b_n = 0$; për n tek, $b_n = 4/(\pi n)$.

Hapi 4. Për x që nuk është pikë kërcimi,

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}.$$

Hapi 5. Në $x = 0$, kufijtë janë -1 dhe 1, prandaj shuma është 0.

Kontroll kritik. Në pikat e kërcimit luhatjet e Gibbs-it nuk kundërshtojnë konvergjencën e serisë te mesatarja.

Ushtrimi 4 — Përafrimi optimal në L^2

Problemi. Tregoni se shuma $S_N f$ minimizon $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - p(x)|^2 dx$ për $p \in T_N$.

Hapi 1. Nga formulat e koeficientëve, $\langle f - S_N f, \cos(nx) \rangle = 0$ dhe analogjikisht për $\sin(nx)$ e konstanten, për çdo frekuencë $n \leq N$.

Hapi 2. Nga lineariteti, $\langle f - S_N f, q \rangle = 0$ për çdo $q \in T_N$.

Hapi 3. Për një $p \in T_N$, shkruajmë $f - p = (f - S_N f) + (S_N f - p)$.

Hapi 4. Katrori i normës jep

$$\|f - p\|_2^2 = \|f - S_N f\|_2^2 + \|S_N f - p\|_2^2 \geq \|f - S_N f\|_2^2 .$$

Hapi 5. Barazia vlen nëse dhe vetëm nëse $S_N f = p$ pothuajse kudo, pra identikisht si polinome.

Kontroll kritik. Optimaliteti është në normën L^2, jo në normën uniforme dhe jo domosdoshmërisht pikë për pikë.

Ushtrimi 5 — Parsevali dhe seria $\sum n^{-2}$

Problemi. Duke përdorur $f(x) = x$, vërtetoni $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \pi^2/6$.

Hapi 1. Nga Ushtrimi 1: $a_0 = a_n = 0$, $b_n = 2(-1)^{n+1}/n$.

Hapi 2. Nga Parsevali,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 .$$

Hapi 3. Ana e majtë është

$$\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Hapi 4. Ana e djathtë është

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Hapi 5. Duke barazuar,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}.$$

Kontroll kritik. Normimi i koeficientëve është i lidhur me faktorin $1/\pi$ në formulën e Parsevalit.

Ushtrimi 6 — Mesataret e Fejérit për një harmonikë

Problemi. Për $f(x) = \cos(3x)$ gjeni $S_N f$ dhe $\sigma_N f$.

Hapi 1. Nga ortogonaliteti koeficienti i vetëm jozero është $a_3 = 1$.

Hapi 2. Për $N < 3$, $S_N f = 0$; për $N \geq 3$, $S_N f = \cos(3x)$.

Hapi 3. Sipas përkufizimit,

$$\sigma_N f = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} S_k f.$$

Hapi 4. Kur $N \geq 3$, janë $N - 2$ terma jozero ($k = 3, \ldots, N$). Prandaj

$$\boxed{\sigma_N f(x) = \left(1 - \frac{3}{N+1}\right)\cos(3x)}.$$

Hapi 5. Për $N \to \infty$, faktori shkon drejt 1, uniformisht ndaj x.

Kontroll kritik. Pesha $1 - n/(N+1)$ është tipar i mesatareve të Fejérit, jo i shumës së zakonshme.

Ushtrimi 7 — Funksioni x^2 dhe koeficientët

Problemi. Gjeni serinë e Fourier-it për $f(x) = x^2$, $-\pi \le x \le \pi$.

Hapi 1. Meqë f është çift, $b_n = 0$.

Hapi 2. Termi konstant:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Hapi 3. Për $n \ge 1$,

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos(nx)dx.$$

Hapi 4. Dy integrime sipas pjesëve japin

$$\int_0^\pi x^2\cos(nx)dx = \frac{2\pi(-1)^n}{n^2}.$$

Hapi 5. Prandaj

$$\boxed{x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(nx)}{n^2}}.$$

Kontroll kritik. Në skajet $\pm\pi$ funksioni përputhet periodikisht, ndaj vlera e serisë është π^2.

Ushtrimi 8 — Kontrolli i një pretendimi të gabuar

Problemi. Një student pohon: "Meqë $S_N f \to f$ pikësisht, atëherë konvergjenca është uniforme". Analizoni pohimin për valën katrore.

Hapi 1. Çdo $S_N f$ është polinom trigonometrik, pra i vazhdueshëm.

Hapi 2. Vendosim $g(x) = \lim_{N\to\infty} S_N f(x)$: në pikat e vazhdueshmërisë $g = f$, ndërsa në pikën e kërcimit g merr mesataren e kufijve njëanësorë. Supozojmë për kundërshtim se $S_N f \to g$ uniformisht në një interval të mbyllur që përmban kërcimin.

Hapi 3. Kufiri uniform i funksioneve të vazhdueshme është i vazhdueshëm.

Hapi 4. Por g ka kufij njëanësorë të ndryshëm pranë kërcimit, pavarësisht vlerës mesatare në pikën e kërcimit. Pra g është i ndërprerë.

Hapi 5. Del kundërshtim. Konvergjenca uniforme nuk vlen në intervale që përfshijnë pikën e kërcimit.

Kontroll kritik. Një provë grafike nuk mjafton: argumenti vendimtar është teorema e vazhdueshmërisë së kufirit uniform.