ANALIZË MATEMATIKE III • FLETORE USHTRIMESH

Leksioni 9: ushtrime të zgjidhura

Funksionet me disa ndryshore

Autore: Prof. As. Dr. Siditë Duraj
Universiteti i Shkodrës "Luigj Gurakuqi"
Fakulteti i Shkencave të Natyrës, Departamenti i Matematikës

Çdo problem ka hapat e provës, kontrollin e hipotezave dhe përfundimin. Numrat e ushtrimeve përputhen me kapitullin digjital.

Ushtrimi 1 — Fusha e përcaktimit

Problemi. Gjeni fushën e $f(x,y) = \dfrac{\ln(9 - x^2 - y^2)}{\sqrt{y - x}}$.

Hapi 1. Kushti i logaritmit. Argumenti është pozitiv: $9 - x^2 - y^2 > 0$, pra $x^2 + y^2 < 9$.

Hapi 2. Kushti i rrënjës. Meqë rrënja ndodhet në emërues, $\sqrt{y - x}$ duhet të jetë reale dhe jozero; rrjedhimisht $y - x > 0$.

Hapi 3. Ndërprerja e kushteve. Të dy kushtet duhet të vlejnë njëkohësisht:

$$\boxed{D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 9,\ y > x\}.}$$

Hapi 4. Interpretimi gjeometrik. D është pjesa e diskut të hapur me rreze 3 që ndodhet sipër drejtëzës $y = x$. As rrethi kufitar, as drejtëza nuk përfshihen.

Kontroll kritik. Kushti $y \geq x$ do të ishte gabim: në $y = x$ emëruesi bëhet zero.

Ushtrimi 2 — Nivelet dhe grafiku

Problemi. Gjeni bashkësitë e nivelit të $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ për $c \in \mathbb{R}$.

Hapi 1. Vendosim $f(x, y) = c$, pra $x^2 + 4y^2 = c$.

Hapi 2. Meqë çdo katror është jonegativ, për $c < 0$ bashkësia është boshe.

Hapi 3. Për $c = 0$ duhen të dy katrorët zero, prandaj niveli është vetëm pika $(0, 0)$.

Hapi 4. Për $c > 0$ pjesëtojmë me c:

$$\frac{x^2}{c} + \frac{y^2}{c/4} = 1.$$

Kjo është elips me gjysmëboshtet $\sqrt{c}$ dhe $\sqrt{c}/2$.

Kontroll kritik. Niveli i funksionit nuk është e njëjta gjë me grafikun tredimensional $z = x^2 + 4y^2$.

Ushtrimi 3 — Kufiri që nuk ekziston

Problemi. Shqyrtoni $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

Hapi 1. Origjina është pikë grumbullimi e fushës së përcaktimit $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Hapi 2. Zgjedhim rrugën $y = 0$, ku $f(x,0) = 0$ për $x \neq 0$; kufiri përgjatë saj është 0.

Hapi 3. Zgjedhim rrugën $y = x$, ku $f(x,x) = x^2/(2x^2) = 1/2$ për $x \neq 0$; kufiri përgjatë saj është $1/2$.

Hapi 4. Po të ekzistonte një kufi i përgjithshëm L, ai do të ishte i njëjtë përgjatë çdo trajektoreje; $0 \neq 1/2$ e kundërshton këtë.

Përfundimi. Kufiri nuk ekziston. Dy trajektore mjaftojnë për një provë të mosekzistencës.

Ushtrimi 4 — Pse drejtëzat nuk mjaftojnë

Problemi. Analizoni kufirin në origjinë të $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$.

Hapi 1. Për çdo drejtëz $y = mx$ me $m \neq 0$ kemi

$$f(x, mx) = \frac{mx^3}{x^4 + m^2 x^2} = \frac{mx}{x^2 + m^2} \longrightarrow 0.$$

Hapi 2. Për $m = 0$ marrim $f(x, 0) = 0$. Edhe përgjatë drejtëzës vertikale $x = 0$ vlera është zero.

Hapi 3. Zgjedhim parabolën $y = x^2$. Atëherë

$$f(x, x^2) = \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2} \qquad (x \neq 0).$$

Hapi 4. Kriteri me vargje ose argumenti i trajektoreve jep dy kufij të ndryshëm: 0 dhe $1/2$.

Përfundimi. Kufiri nuk ekziston, megjithëse përgjatë çdo drejtëze që kalon nga origjina është zero.

Ushtrimi 5 — Kufi i vërtetuar me koordinata polare

Problemi. Vërtetoni $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$.

Hapi 1. Vendosim $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $r > 0$.

Hapi 2. Termi transformohet në

$$\frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2} = r\cos^2\theta\sin\theta.$$

Hapi 3. Për të gjitha këndet θ, $|\cos^2\theta\sin\theta| \le 1$, ndaj

$$\left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| \le r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Hapi 4. Për $\varepsilon > 0$ marrim $\delta = \varepsilon$. Nëse $0 < r < \delta$, diferenca nga zero është më e vogël se ε.

Kontroll kritik. Vlerësimi është uniform në θ; kjo, jo vetëm llogaritja për kënde fikse, provon kufirin.

Ushtrimi 6 — Kufi me pabarazi

Problemi. Gjeni $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$.

Hapi 1. Shënojmë $r^2 = x^2 + y^2$. Meqë $x^2 \le r^2$ dhe $y^2 \le r^2$, mund të përdorim vlerësim të thjeshtë.

Hapi 2. Për $r > 0$ kemi

$$0 \le \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \le \frac{r^2y^2}{r^2} = y^2 \le r^2.$$

Hapi 3. Nga $r^2 \to 0$ dhe teorema e sanduiçit përfundon se kufiri është zero.

Hapi 4. Përkufizimi ε–δ jepet edhe drejtpërdrejt: zgjedhim $\delta = \sqrt{\varepsilon}$.

Përfundimi. Kufiri është 0; mënyra e provës vlen për të gjitha trajektoret njëkohësisht.

Ushtrimi 7 — Vazhdueshmëria në origjinë

Problemi. Le të jetë $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$ për $(x,y) \neq (0,0)$ dhe $f(0,0) = a$. Për cilën vlerë të a është i vazhdueshëm?

Hapi 1. Nga Ushtrimi 5, kufiri në origjinë është $L = 0$.

Hapi 2. Sipas përkufizimit, për vazhdueshmëri kërkohet $f(0,0) = L$.

Hapi 3. Kështu domosdoshmërisht $a = 0$.

Hapi 4. Mjaftueshmëria: për $a = 0$, vlerësimi $|f(x,y)| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ jep vazhdueshmëri ε–δ në origjinë.

Përfundimi. Vetëm për $\boxed{a = 0}$ funksioni është i vazhdueshëm në $(0,0)$.

Ushtrimi 8 — Vargjet dhe kriteri i Hajnesit

Problemi. Tregoni se $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ nuk ekziston duke përdorur vargje.

Hapi 1. Marrim $p_n = (1/n, 0)$. Atëherë $p_n \to (0,0)$ dhe $f(p_n) = 1$.

Hapi 2. Marrim $q_n = (0, 1/n)$. Atëherë $q_n \to (0,0)$ dhe $f(q_n) = 0$.

Hapi 3. Të dy vargjet i përkasin fushës së funksionit dhe asnjëri nuk merr pikën e përjashtuar $(0,0)$.

Hapi 4. Sipas kriterit të Hajnesit, nëse ekzistonte kufiri ai duhet të ishte njëkohësisht 1 dhe 0.

Përfundimi. Kufiri nuk ekziston.

Ushtrimi 9 — Vazhdimësia e përbërjes

Problemi. Studioni vazhdueshmërinë e $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$ në $\mathbb{R}^2$.

Hapi 1. Funksioni $q(x, y) = x^2 + y^2$ është polinom në dy ndryshore, prandaj i vazhdueshëm kudo.

Hapi 2. Për çdo pikë, $1 + q(x, y) \geq 1 > 0$. Pra argumenti i logaritmit është pozitiv në të gjithë planin.

Hapi 3. Logaritmi natyror është i vazhdueshëm në $(0, \infty)$.

Hapi 4. Nga teorema e përbërjes, $\ln(1 + q(x, y))$ është i vazhdueshëm në çdo pikë.

Përfundimi. Fusha është $\mathbb{R}^2$ dhe funksioni është i vazhdueshëm në të.

Ushtrimi 10 — Kufiri i varur nga parametri

Problemi. Shqyrtoni kufirin në origjinë të $f_\alpha(x,y) = \dfrac{r^\alpha}{1+r^2}$, ku $r = \sqrt{x^2+y^2} > 0$ dhe $\alpha \in \mathbb{R}$.

Hapi 1. Funksioni është radial: nuk varet nga këndi, por vetëm nga $r > 0$.

Hapi 2. Për $\alpha > 0$, $r^\alpha \to 0$ dhe $1 + r^2 \to 1$, prandaj kufiri është 0.

Hapi 3. Për $\alpha = 0$, $f_0 = 1/(1+r^2) \to 1$.

Hapi 4. Për $\alpha < 0$, shkruajmë $\alpha = -\beta$ me $\beta > 0$. Atëherë $r^\alpha = 1/r^\beta \to +\infty$ dhe emëruesi priret drejt 1.

Përfundimi. Kufiri real i fundmë ekziston për $\alpha \geq 0$, me vlerë 0 për $\alpha > 0$ dhe 1 për $\alpha = 0$; për $\alpha < 0$ shprehja shkon drejt $+\infty$ dhe nuk ka kufi të fundmë real.

Ushtrimi 11 — Kufiri me parametër dhe koordinata polare

Problemi. Për $\alpha \in \mathbb{R}$ studioni kufirin në origjinë të

$$F_\alpha(x,y) = \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^\alpha}, \qquad (x,y) \neq (0,0).$$

Hapi 1. Fusha. Funksioni është i përcaktuar për çdo $(x,y) \neq (0,0)$, sepse baza x^2+y^2 është pozitive.

Hapi 2. Zëvendësimi polar. Marrim $x = r\cos\theta$ dhe $y = r\sin\theta$. Atëherë

$$F_\alpha = r^{3-2\alpha}\cos^2\theta\sin\theta.$$

Hapi 3. Rasti $\alpha < \frac{3}{2}$. Meqë $|\cos^2\theta\sin\theta| \le 1$, kemi

$$|F_\alpha| \le r^{3-2\alpha} \longrightarrow 0.$$

Ky vlerësim është uniform në θ; për $\varepsilon > 0$ mjafton $\delta = \varepsilon^{1/(3-2\alpha)}$.

Hapi 4. Rasti $\alpha = \frac{3}{2}$. Për $y = 0$ marrim zero. Për $y = x > 0$, $\theta = \pi/4$ dhe rezulton

$$F_{3/2} = \cos^2(\pi/4)\sin(\pi/4) = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Kufijtë përgjatë dy trajektoreve nuk përputhen.

Hapi 5. Rasti $\alpha > \frac{3}{2}$. Përgjatë $y = x > 0$ kemi $F_\alpha = 2^{-\alpha} r^{3-2\alpha}$ herë një faktor këndor ekuivalent konstant pozitiv; si rrjedhojë shprehja shkon në $+\infty$, ndërsa përgjatë $y = 0$ mbetet zero.

Përfundimi. Kufiri real i fundmë ekziston saktësisht kur $\boxed{\alpha < \frac{3}{2}}$ dhe është zero.

Ushtrimi 12 — Vazhdueshmëria uniforme në një disk

Problemi. Provoni drejtpërdrejt se $f(x,y) = x^2 + y^2$ është uniformisht i vazhdueshëm në $K = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le R^2\}$, $R > 0$.

Hapi 1. Vendosim $p = (x,y)$, $q = (u,v)$ dhe shënojmë $\|p\|_2, \|q\|_2 \le R$.

Hapi 2. Përdorim identitetin $\|p\|_2^2 - \|q\|_2^2 = (p+q)\cdot(p-q)$.

Hapi 3. Nga pabarazia e Koshi–Shvarcit,

$$|f(p) - f(q)| \le \|p+q\|_2 \, \|p-q\|_2 \le 2R\|p-q\|_2.$$

Hapi 4. Për $\varepsilon > 0$ zgjedhim $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2R}$. Për çdo $p, q \in K$ me $\|p-q\|_2 < \delta$, marrim $|f(p) - f(q)| < \varepsilon$.

Hapi 5. Kontrolli kritik. Zgjedhja e δ varet nga ε dhe R, por jo nga pikat p, q. Kjo provon uniformitetin.

Përfundimi. Funksioni është madje Lipschitz në K me konstantë $2R$.

Përmbledhje metodologjike

Për të provuar mosekzistencën e një kufiri, ndërtoni dy trajektore ose dy vargje. Për të provuar ekzistencën, kërkoni pabarazi uniforme ndaj të gjitha rrugëve të afrimit. Dalloni gjithnjë vlerën e funksionit në pikë nga kufiri i tij dhe verifikoni domenin përpara përdorimit të teoremave.