Leksioni 04 — Fletore e zgjidhjeve të argumentuara

Analizë Matematike III · Prof. As. Dr. Siditë Duraj
Universiteti i Shkodrës “Luigj Gurakuqi” · CIKLI III në Matematikë · 2026–2027

Ushtrimi 1 — Maclaurin dhe certifikimi i gabimit

Problem. Njehsoni $T_{3,0}$ për e^x dhe kufizoni gabimin për $x = 0.2$.

Hapi 1. Nga $f^{(k)}(0) = 1$, marrim $T_{3,0}(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6$.

Hapi 2. $T_{3,0}(0.2) = 1 + 0.2 + 0.02 + 0.008/6 = 1.221333\ldots$.

Hapi 3. Me Taylor-Lagranzhin $R_3 = e^{\xi}(0.2)^4/4!$ për $0 < \xi < 0.2$.

Hapi 4. Nga $e^{\xi} < e^{0.2} < 2$ kemi $|R_3| < 2(0.2)^4/24 = 1/7500 \approx 0.00013334$.

Përfundimi. Përafrimi është i certifikuar deri në gabim më të vogël se $1.34 \cdot 10^{-4}$.

Ushtrimi 2 — Kosinusi dhe rendi efektiv

Problem. Përafroni $\cos(0.2)$ me $1 - 0.2^2/2$ dhe provoni kufirin e gabimit.

Hapi 1. $T_{3,0}(x) = 1 - x^2/2$ sepse koeficienti i rendit 3 është zero.

Hapi 2. Derivati i katërt i kosinusit është $\cos t$ dhe $|\cos t| \le 1$ për çdo t.

Hapi 3. Mbetja e rendit 3 vlerësohet me $|R_3(0.2)| \le (0.2)^4/4! = 1/15000 \approx 6.67 \cdot 10^{-5}$.

Përfundimi. $\cos(0.2) = 0.98 + R_3$ dhe $|R_3| \le 1/15000$.

Ushtrimi 3 — Intervali i vlefshmërisë së logaritmit

Problem. Studioni zhvillimin $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n/n$ dhe skajet.

Hapi 1. Integrimi lokal i $\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = 1/(1+x)$ jep formulën për $|x| < 1$.

Hapi 2. Në $x = 1$ seria është $1 - 1/2 + 1/3 - \cdots$, konvergjon sipas Leibnizit dhe shuma është $\ln 2$ nga kalimi i justifikuar te skaji.

Hapi 3. Në $x = -1$ termat janë $-1/n$, prandaj shuma divergon në $-\infty$.

Përfundimi. Bashkësia e vlefshmërisë së identitetit është $(-1, 1]$. Nuk lejohet zëvendësimi $x = 2$.

Ushtrimi 4 — Sa terma duhen për $\ln 2$?

Problem. Kërkohet gabim jo më i madh se 10^{-3} me serinë alternuese.

Hapi 1. Pas N termash, kriteri i Leibnizit jep $|R_N| \le 1/(N+1)$.

Hapi 2. Kërkojmë $1/(N+1) \le 10^{-3}$; mjafton $N + 1 \ge 1000$.

Përfundimi. $N = 999$ terma garantojnë gabimin e kërkuar (nëse kërkohet rreptësisht më i vogël se 10^{-3}, zgjidhet $N = 1000$).

Ushtrimi 5 — Pse C^∞ nuk mjafton?

Problem. Për $g(0) = 0$ dhe $g(x) = e^{-1/x^2}$ kur $x \neq 0$, shpjegoni pse seria Taylor në zero nuk përfaqëson g.

Hapi 1. Për $x \neq 0$, çdo derivat ka trajtën $P(1/x)e^{-1/x^2}$ për një polinom P.

Hapi 2. Për çdo $m \geq 0$, $|x|^{-m}e^{-1/x^2} \to 0$ kur $x \to 0$, sepse eksponenciali dominon çdo fuqi.

Hapi 3. Me induksion për përkufizimin e derivatit në zero, $g^{(n)}(0) = 0$ për çdo n.

Hapi 4. Seria e Taylor-it është $\sum 0 \cdot x^n = 0$, por $g(x) > 0$ për $x \neq 0$.

Përfundimi. Funksioni është i derivueshëm pafundësisht, por jo analitik në zero.

Ushtrimi 6 — Gabim i kontrolluar për $e^{1/2}$

Problem. Njehsoni polinomin e Maclaurin-it të rendit 4 dhe jepni kufi për mbetjen.

Hapi 1. $T_{4,0}(1/2) = 1 + 1/2 + 1/8 + 1/48 + 1/384 = 211/128$.

Hapi 2. Nga forma e Lagranzhit, $R_4 = e^{\xi}(1/2)^5/5!$ për $0 < \xi < 1/2$.

Hapi 3. Me $e^{\xi} < 2$, kemi $|R_4| < 2/(32 \cdot 120) = 1/1920$.

Përfundimi. $|e^{1/2} - 211/128| < 1/1920$.

Standardi i verifikimit

Çdo përfundim dallon qartë identitetin, hipotezën e zbatimit dhe kufirin e gabimit. Rezultatet numerike nuk zëvendësojnë argumentin matematikor.