UNIVERSITETI I SHKODRËS “LUIGJ GURAKUQI”
FAKULTETI I SHKENCAVE TË NATYRËS · DEPARTAMENTI I MATEMATIKËS

Analizë Matematike III

Fletore ushtrimesh të zgjidhura

Leksioni 5 · Kalimi në limit, integrimi dhe derivimi

Prof. As. Dr. Siditë Duraj
CIKLI II në Matematikë · Viti akademik 2026–2027

Standardi i zgjidhjes. Çdo problem paraqitet me të dhënat, hapat e argumentuar, hipotezat e përdorura dhe përfundimin. Një grafik ose një llogaritje numerike nuk konsiderohet provë e një pohimi për konvergjencën uniforme.

Version i rishikuar për përdorim mësimor dhe kontroll përfundimtar.

Ushtrimi 1. Një pohim i pasaktë mbi konvergjencën uniforme

Për $x \in [0,1]$ dhe $n \geq 1$, le të jetë $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}$. Kontrolloni pohimin se f_n nuk konvergjon uniformisht drejt zeros.

1. **Përcaktimi i kufirit pikësor.**
   Në $x = 0$, $f_n(0) = 0$. Për çdo $x > 0$ të fiksuar, $nx^2 \to \infty$ dhe rrjedhimisht $f_n(x) \to 0$. Pra $f \equiv 0$.

2. **Kriteri që duhet kontrolluar.**
   Konvergjenca uniforme është e barasvlershme me
   $$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{0 \leq x \leq 1} \frac{x}{1+nx^2} \longrightarrow 0.$$

3. **Gjetja e maksimumit.**
   Meqë f_n është e derivueshme,
   $$f_n'(x) = \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}.$$
   Derivati është pozitiv për $x < 1/\sqrt{n}$ dhe negativ për $x > 1/\sqrt{n}$. Pika $x_n = 1/\sqrt{n}$ është në $[0,1]$.

4. **Vlerësimi i normës.**
   Në pikën kritike,
   $$f_n(x_n) = \frac{1/\sqrt{n}}{1+n(1/n)} = \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$
   Prandaj $\|f_n\|_\infty = 1/(2\sqrt{n}) \to 0$.

5. **Kundërkrahasimi.**
   Nëse $g_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, atëherë $g_n(x) \to 0$ për çdo x, por $g_n(1/n) = 1/2$. Për rrjedhojë g_n nuk konvergjon uniformisht.

Përfundim. Pohimi fillestar është i gabuar: $f_n \to 0$ uniformisht në $[0,1]$. Dallimi me g_n varet nga supremumi, jo vetëm nga kufiri pikësor.

Ushtrimi 2. Konvergjenca pikësore pa konvergjencë uniforme

Për $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$, përcaktoni kufirin dhe shqyrtoni uniformitetin.

1. **Kufiri për $0 \le x < 1$.**
   Për çdo x të fiksuar me $|x| < 1$, vargu gjeometrik $x^n \to 0$.

2. **Kufiri në skaj.**
   Për $x = 1$ kemi $f_n(1) = 1$. Kështu
   $$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

3. **Gabimi pikësor.**
   Për $x < 1$, $|f_n(x) - f(x)| = x^n$; për $x = 1$, ky gabim është zero.

4. **Supremumi i gabimit.**
   Për çdo $n \ge 1$,
   $$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{0 \le x < 1} x^n = 1.$$
   Vlera 1 nuk arrihet në $[0,1)$, por është supremum, sepse $x^n \to 1$ kur $x \uparrow 1$, me n të fiksuar.

5. **Kontrolli konceptual.**
   Çdo f_n është i vazhdueshëm; f është i ndërprerë në 1. Në një hapësirë metrike, kufiri uniform i funksioneve të vazhdueshme është i vazhdueshëm.

Përfundim. Konvergjenca është pikësore, por jo uniforme. Kontinuiteti i f_n jep gjithashtu një argument alternativ.

Ushtrimi 3. Pse limiti nuk mund të kalohet automatikisht nën integral

Për $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$ në $[0,1]$, krahasoni $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n$ me $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n$.

1. **Kufiri në skaje.**

   $f_n(0) = f_n(1) = 0$ për çdo $n \geq 1$.

2. **Kufiri brenda intervalit.**

   Për $x \in (0,1)$, shkruajmë $q = 1 - x \in (0,1)$. Dihet se $n^2 q^n \to 0$; meqë x është i fiksuar, $f_n(x) \to 0$. Kështu kufiri pikësor është $f \equiv 0$.

3. **Integrali i termit.**

   Me $u = 1 - x$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 x(1-x)^n \, dx &= \int_0^1 (1-u)u^n \, du \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.\end{aligned}$$

4. **Integrali i f_n.**

   Shumëzojmë me n^2:

$$\int_0^1 f_n(x)\, dx = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \longrightarrow 1.$$

5. **Integrali i funksionit kufi.**

   Meqë $f(x) = 0$ për çdo $x \in [0,1]$, kemi $\int_0^1 f(x)\, dx = 0$.

6. **Interpretimi.**

   Pavarësisht konvergjencës pikësore, masa e funksioneve grumbullohet pranë $x = 0$, prandaj integralet nuk shkojnë në zero.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx.}$$

Konvergjenca pikësore, pa hipoteza shtesë, nuk justifikon shkëmbimin e limitit me integralin.

Ushtrimi 4. Përcaktimi i saktësisë së garantuar të integralit

Supozojmë $\sup_{x\in[0,2]} |f_n(x) - f(x)| \le \dfrac{3}{n}$. Gjeni një indeks N që garanton gabim integral rreptësisht më të vogël se 0.01 për çdo $n \ge N$.

1. **Përcaktimi i gabimit.**
   Vendosim $E_n = \left| \int_0^2 f_n(x)\,dx - \int_0^2 f(x)\,dx \right|$.

2. **Linearitet dhe pabarazia trekëndore.**
   Nga vetitë e integralit Riemann,
   $$E_n = \left| \int_0^2 (f_n - f)\,dx \right| \le \int_0^2 |f_n - f|\,dx.$$

3. **Përdorimi i majorantit uniform.**
   Për çdo $x \in [0,2]$, $|f_n(x) - f(x)| \le 3/n$. Prandaj
   $$E_n \le \int_0^2 \frac{3}{n}\,dx = \frac{6}{n}.$$

4. **Zgjidhja e pabarazisë.**
   Kërkojmë $6/n < 0.01$, domethënë $n > 600$.

5. **Indeksi i garantuar.**
   Indeksi më i vogël natyror që plotëson këtë kusht të mjaftueshëm është $N = 601$.

Përfundim. Për çdo $n \ge 601$ kemi $E_n \le 6/n < 0.01$. Ky është kufiri i garantuar nga të dhënat, jo domosdoshmërisht gabimi real i një çifti të caktuar funksionesh.

Ushtrimi 5. Kufiri uniform mund të mos jetë i derivueshëm

Për $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n}}$ në $[-1, 1]$, provoni konvergjencën uniforme dhe shqyrtoni derivueshmërinë e kufirit.

1. **Kufiri pikësor.**
   Për çdo x, nga vazhdueshmëria e rrënjës $f_n(x) \to \sqrt{x^2} = |x|$.

2. **Gabimi është jonegativ.**
   Meqë $x^2 + 1/n \geq x^2$, kemi $f_n(x) - |x| \geq 0$.

3. **Vlerësimi uniform.**
   Për $a, b \geq 0$, $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Duke marrë $a = x^2$ dhe $b = 1/n$,

$$0 \leq \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (\forall x \in [-1, 1]).$$

4. **Kalimi te supremumi.**
   $\|f_n - |\cdot|\|_\infty \leq 1/\sqrt{n} \to 0$; prandaj konvergjenca është uniforme.

5. **Derivueshmëria e termave.**
   $f_n'(x) = x/\sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n}}$ ekziston për çdo x.

6. **Derivueshmëria e kufirit.**
   Funksioni $|x|$ ka derivat të majtë -1 dhe të djathtë 1 në 0; rrjedhimisht nuk është i derivueshëm atje.

Përfundim. Konvergjenca uniforme e funksioneve të derivueshme nuk garanton derivueshmërinë e kufirit.

Ushtrimi 6. Rëndësia e vlerës së funksioneve në një pikë

Për $f_n(x) = n + x$, $x \in [0,1]$, tregoni pse vetëm konvergjenca uniforme e f_n' nuk garanton konvergjencën e f_n.

1. **Derivati i çdo funksioni.**
   Për çdo n dhe x, $f_n'(x) = 1$.

2. **Konvergjenca uniforme e derivateve.**
   Duke zgjedhur $g(x) = 1$, kemi
   $$\sup_{x\in[0,1]} |f_n'(x) - g(x)| = \sup_{x\in[0,1]} 0 = 0.$$

3. **Vlerësimi në një pikë fikse.**
   Për çdo $x_0 \in [0,1]$,
   $$f_n(x_0) = n + x_0 \longrightarrow +\infty.$$

4. **Mospërmbushja e hipotezës.**
   Nuk ekziston pikë x_0 ku $(f_n(x_0))$ konvergjon në $\mathbb{R}$.

5. **Arsyeja strukturore.**
   Derivimi e zhduk konstanten n; informacioni për derivatet nuk kontrollon konstantat aditive.

Përfundim. Në teoremën standarde të shkëmbimit të limitit me derivatin, konvergjenca në një pikë bazë është një hipotezë e nevojshme për argumentin e përgjithshëm.

Ushtrimi 7. Integrimi i një serie funksionale term pas termi

Le të jetë $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ për $x \in [0,1]$. Justifikoni integrimin term pas termi dhe njehsoni $\int_0^1 S(x)\,dx$.

1. **Majorimi i termit.**
   Për $x \in [0,1]$, kemi $0 \le x^n/n^2 \le 1/n^2$.

2. **Konvergjenca uniforme.**
   Meqë $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ konvergjon, kriteri i Vajershtrasit jep konvergjencën uniforme të $\sum x^n/n^2$ në $[0,1]$.

3. **Përdorimi i teoremës.**
   Të gjithë termat janë të vazhdueshëm. Prandaj
   $$\int_0^1 S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{n^2}\,dx.$$

4. **Integrimi i termit.**
   Duke përdorur formulën e fuqisë,
   $$\int_0^1 \frac{x^n}{n^2}\,dx = \frac{1}{n^2}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n^2(n+1)}.$$

5. **Zbërthimi në thyesa të pjesshme.**
   $$\frac{1}{n^2(n+1)} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}.$$

6. **Shuma teleskopike.**
   Për $N \ge 1$,
   $$\sum_{n=1}^{N} \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) = -1 + \frac{1}{N+1} \longrightarrow -1.$$

7. **Përdorimi i shumës së njohur.**
   Nga $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$ përftojmë shumën e kërkuar.

$$\boxed{\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}\,dx = \frac{\pi^2}{6} - 1.}$$

Ushtrimi 8. Derivimi i serisë gjeometrike

Justifikoni barazimin $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ për $|x| < 1$.

1. **Seria fillestare.**
   Për $|x| < 1$ dihet $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1/(1-x)$.

2. **Zgjedhja e segmentit të brendshëm.**
   Fiksojmë r të tillë që $0 < r < 1$ dhe $|x| \le r$.

3. **Majorimi i serisë së derivateve.**
   Kemi $|nx^{n-1}| \le nr^{n-1}$.

4. **Konvergjenca e majorantit.**
   Seria $\sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1}$ konvergjon sipas kriterit të raportit: raporti i termave të njëpasnjëshëm shkon në $r < 1$.

5. **Hipoteza në një pikë.**
   Në $x_0 = 0$ seria origjinale ka shumën 1 (vetëm termi $n = 0$ mbetet). Kështu kushtet për derivim term pas termi plotësohen në çdo segment $[-r, r]$.

6. **Derivimi.**
   Duke derivuar identitetin fillestar në $(-r, r)$,
   $$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

7. **Zgjerimi në interval.**
   Meqë $r < 1$ është arbitrar, formula vlen për çdo $x \in (-1, 1)$.

Përfundim. Derivimi është i justifikuar në çdo segment kompakt të $(-1, 1)$, jo automatikisht në pikat skajore ± 1.

Ushtrimi 9. Pse derivimi mund të dështojë në skajin e intervalit

Për $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$, $0 \le x \le 1$, shqyrtoni derivatin e majtë të S në $x = 1$.

1. **Vazhdueshmëria deri në skaj.**
   Seria konvergjon uniformisht në $[0, 1]$ nga kriteri i Vajershtrasit; prandaj S është e vazhdueshme edhe në 1.

2. **Derivimi në brendësi.**
   Në çdo $[0, r]$ me $r < 1$, seria e derivateve konvergjon uniformisht. Kështu
   $$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}, \quad 0 < x < 1.$$

3. **Identiteti logaritmik.**
   Nga zhvillimi i $-\ln(1-x)$ për $0 < x < 1$ rezulton
   $$S'(x) = \frac{-\ln(1-x)}{x}.$$

4. **Sjellja afër skajit.**
   Kur $x \uparrow 1$, numëruesi $-\ln(1-x) \to +\infty$, kurse $x \to 1$, ndaj $S'(x) \to +\infty$.

5. **Raporti diferencial në skaj.**
   Për $x \in (0, 1)$, teorema e vlerës mesatare për S në $[x, 1]$ jep një $c_x \in (x, 1)$ të tillë që
   $$\frac{S(1) - S(x)}{1 - x} = S'(c_x).$$

6. **Kalimi në limit.**
   Kur $x \uparrow 1$, edhe $c_x \uparrow 1$, prandaj ana e djathtë shkon në $+\infty$.

Përfundim. S nuk ka derivat të majtë të fundmë në 1. Konvergjenca uniforme e serisë origjinale nuk mjafton për derivim term pas termi në skaj.

Ushtrimi 10. Kontrolli uniform në pika që varen nga indeksi

Supozojmë $f_n \to f$ uniformisht në E. Për vargje arbitrare $x_n, y_n \in E$, provoni se

$$|[f_n(x_n) - f(x_n)] - [f_n(y_n) - f(y_n)]| \longrightarrow 0.$$

1. **Shënimi i gabimit.**
   Vendosim $e_n(x) = f_n(x) - f(x)$ dhe $\delta_n = \sup_{x\in E} |e_n(x)|$.

2. **Përkthimi i uniformitetit.**
   Nga konvergjenca uniforme del $\delta_n \to 0$.

3. **Pabarazia trekëndore.**
   Për çdo n,
   $$|e_n(x_n) - e_n(y_n)| \le |e_n(x_n)| + |e_n(y_n)|.$$

4. **Vlerësimi i secilit term.**
   Meqë $x_n, y_n \in E$, sipas përkufizimit të supremumit
   $$|e_n(x_n)| \le \delta_n, \qquad |e_n(y_n)| \le \delta_n.$$

5. **Përfundimi nga teorema e shtrydhjes.**
   Kështu
   $$0 \le |e_n(x_n) - e_n(y_n)| \le 2\delta_n \longrightarrow 0.$$

6. **Interpretimi.**
   Pikat mund të ndryshojnë me n: supremumi kontrollon njëherazi të gjithë elementët e E.

Përfundim. Pohimi vlen për çdo zgjedhje të $x_n, y_n \in E$. Kjo është një shprehje konkrete e fuqisë së konvergjencës uniforme.