FLETORE USHTRIMESH — LEKSIONI 06

Konvergjenca pikësore, bërthamat e Dirichlet-it dhe Fejér-it, dukuria e Gibbs-it

Prof. As. Dr. Siditë Duraj

Universiteti i Shkodrës “Luigj Gurakuqi” · CIKLIM në Matematikë · 2026–2027

Fletore akademike — Leksioni 6: Ushtrime me zgjidhje

Prof. As. Dr. Siditë Duraj · Analizë Matematike III · CIKLIM në Matematikë · 2026–2027

Ushtrimi 1. Seria e Fourier-it e funksionit $f(x) = x$

Problemi. Gjeni serinë e Fourier-it në $(-\pi, \pi)$ dhe kufijtë në skajet e periudhës.

Hapi 1. Simetria. $f(-x) = -f(x)$, prandaj $a_0 = a_n = 0$.

Hapi 2. Koeficientët. $b_n = (2/\pi)\int_0^\pi x \sin nx\, dx$. Integrimi me pjesë jep $b_n = 2(-1)^{n+1}/n$.

Hapi 3. Konvergjenca. Zgjatimi është pjesë-pjesë C^1, prandaj Dirichlet-i jep $S_\infty(x) = x$ për $-\pi < x < \pi$, dhe zero në $x = \pm\pi$.

Përfundim. $x = 2\sum_{n\ge1}(-1)^{n+1}\sin(nx)/n$ në intervalin e hapur. Vlera në skaje është mesatarja e kufijve anësorë.

Ushtrimi 2. Funksioni $f(x) = |x|$

Problemi. Njehsoni serinë e Fourier-it të $|x|$ dhe përcaktoni vlerën e saj në $x = 0$.

Hapi 1. Funksioni është çift, prandaj $b_n = 0$.

Hapi 2. $a_0 = 2\pi^{-1}\int_0^\pi x\, dx = \pi$.

Hapi 3. $a_n = (2/\pi)\int_0^\pi x\cos(nx)\, dx = 2[(-1)^n - 1]/(\pi n^2)$.

Hapi 4. Për n çift $a_n = 0$; për n tek $a_n = -4/(\pi n^2)$.

Përfundim. $|x| = \pi/2 - (4/\pi)\sum_{k\ge0}\cos((2k+1)x)/(2k+1)^2$. Konvergjenca është uniforme, sepse seria e koeficientëve absolutë konvergjon. Në zero, $0 = \pi/2 - (4/\pi)\sum_{k\ge0}(2k+1)^{-2}$.

Ushtrimi 3. Vlera në kërcim

Problemi. Funksioni 2π-periodik merr vlerën -2 për $-\pi < x < 0$ dhe 4 për $0 < x < \pi$. Sa është limiti i serisë së Fourier-it në $x = 0$?

Hapi 1. Kufiri i majtë është -2 dhe i djathti 4.

Hapi 2. Zgjatimi është pjesë-pjesë konstant, pra pjesë-pjesë C^1.

Hapi 3. Sipas Dirichlet-it, limiti është $(-2 + 4)/2 = 1$.

Kontroll kritik. Edhe nëse i caktojmë vlerë tjetër $f(0)$, koeficientët Fourier mbeten të pandryshuar.

Ushtrimi 4. Pse konvergjenca uniforme dështon?

Problemi. Provoni se $S_N f$ nuk mund të konvergjojë uniformisht drejt valës katrore në $[-\pi, \pi]$.

Hapi 1. Çdo $S_N f$ është polinom trigonometrik, pra i vazhdueshëm.

Hapi 2. Limiti uniform i funksioneve të vazhdueshme është i vazhdueshëm.

Hapi 3. Vala katrore ka kërcim.

Përfundim. Supozimi i konvergjencës uniforme drejt valës katrore është kontradiktor. Ky argument nuk mohon konvergjencën pikësore në pikat e vazhdimësisë.

Ushtrimi 5. Kufizimi nga Bessel-i

Problemi. Për $f \in L^2[-\pi, \pi]$ me $a_0 = 0$, provoni se $\sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2) \le \|f\|_2^2 / \pi$.

Hapi 1. Ortogonaliteti jep $\langle f - S_N f, S_N f \rangle = 0$.

Hapi 2. Nga Pitagora: $\|f\|_2^2 = \|S_N f\|_2^2 + \|f - S_N f\|_2^2$.

Hapi 3. $\|S_N f\|_2^2 = \pi \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2)$, meqë $a_0 = 0$.

Përfundim. Si $\|f - S_N f\|_2^2 \ge 0$, pabarazia vlen për çdo N.

Ushtrimi 6. Identiteti i Basel-it nga Parsevali

Problemi. Duke përdorur $f(x) = x$, njehsoni $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$.

Hapi 1. Nga Ushtrimi 1, $b_n = 2(-1)^{n+1}/n$ dhe $a_0 = a_n = 0$.

Hapi 2. Parsevali jep $(1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, dx = \sum b_n^2$.

Hapi 3. Integrali është $2\pi^2/3$, ndërsa $\sum b_n^2 = 4 \sum 1/n^2$.

Përfundim. $\boxed{\sum_{n \ge 1} 1/n^2 = \pi^2/6}$.

Ushtrimi 7. Mesataret e Fejér-it

Problemi. Shprehni σ_2 me S_0, S_1, S_2 dhe shpjegoni përse nuk duhet ngatërruar me S_2.

Hapi 1. Nga përkufizimi $\sigma_N = (N+1)^{-1} \sum_{k=0}^{N} S_k$.

Hapi 2. Për $N = 2$, $\sigma_2 = (S_0 + S_1 + S_2)/3$.

Hapi 3. Koeficienti i harmonikut të dytë është peshuar me $1/3$ në σ_2, kundrejt peshës 1 në S_2.

Përfundim. Mesatarja ndryshon koeficientët, duke zvogëluar peshën e harmonikëve të lartë.

Ushtrimi 8. Vlerësim i dukurisë së Gibbs-it

Problemi. Për një kërcim nga -1 në 1, jepni mbikalimin asimptotik të shumave Fourier.

Hapi 1. Lartësia e kërcimit është $J = 2$.

Hapi 2. Mbikalimi asimptotik mbi vlerën e djathtë është afërsisht $0.08949J$.

Hapi 3. Kjo jep 0.17898 mbi 1, pra maksimum afërsisht 1.17898.

Kontroll kritik. Rezultati është asimptotik, jo barazim i saktë për çdo numër të fundmë harmonikësh.